المملكة العربية السعودية
وزارة التربية والتعليم
الإدارة العامة للتربية والتعليم
بمنطقة نجران (بنين)
مركز الإشراف التربوي بشرورة
شعبة الرياضيات



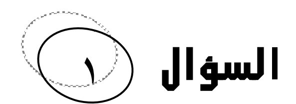
نادي معلمي الرياضيات الورقي

الكتاب السنوي الأول

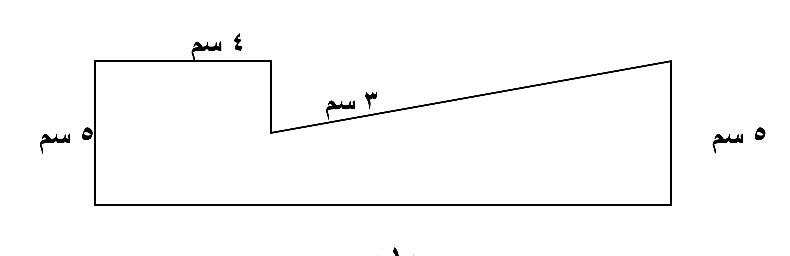
١٤٢٥ - ١٤٢٦ هـ

إهداء

إلى كل من يرفع قلماً في وجه
الجهل والتطرف والمغالاة



السؤال ١

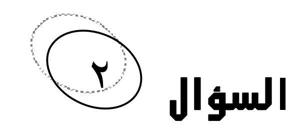


ما هي مساحة الشكل السابق ؟

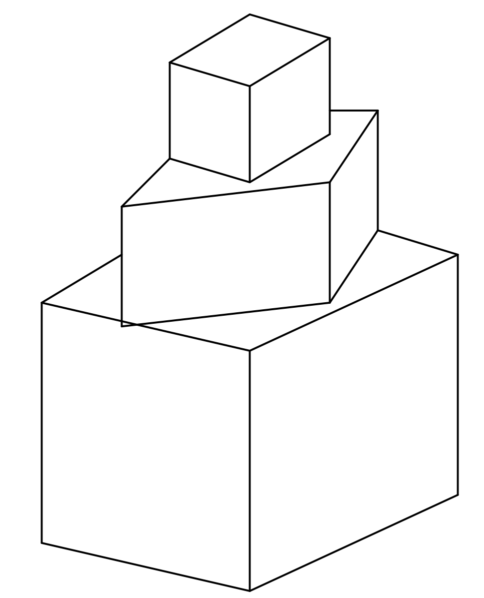
الحــــل

نستكمل المستطيل ومن ذلك نصل إلى أن
مساحة الشكل = مساحة المستطيل – مساحة المثلث

= (٥ × ١٠) - $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٣ = ٤١ سم^{٢}



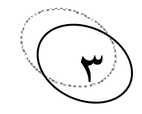
السؤال ٢

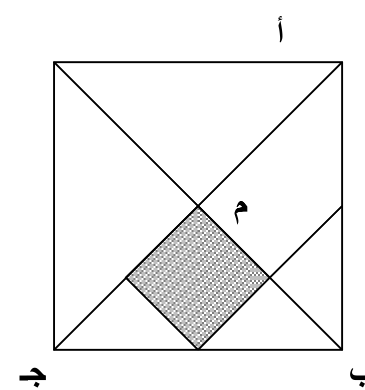


الشكل المجاور يمثل صورة لمجسم يتم التفكير في إنشاؤه في وسط المدينة وهو مكون من ثلاث مكعبات أطوال أضلاعها ١ متر، ٢ متر، ٣ متر على الترتيب.
يراد طلاء المجسم بنوعين من الدهان، إذا كانت تكلفة طلاء المتر المربع من الأوجه الجانبية ٣ دينارات وكلفة طلاء المتر المربع الواحد من الأوجه العلوية الظاهرة ٥ دينارات.
فما كلفة طلاء هذا المجسم ؟.
(الأولمبياد الوطني الأردني للرياضيات ٢٠٠١) مرحلة ابتدائية

الحــــل

مساحة وجه المكعب الأكبر = ٣ × ٣ = ٩ م^{٢}
مساحة وجه المكعب الأوسط = ٢ ×٢ = ٤ م^{٢}
مساحة وجه المكعب الأصغر = ١ × ١ = ١ م^{٢}
المساحة الجانبية للمكعب الأكبر = ٩ × ٤ = ٣٦ م^{٢}
المساحة الجانبية للمكعب الأوسط = ٤ × ٤ =١٦ م^{٢}
المساحة الجانبية للمكعب الأصغر = ١ × ٤ = ٤ م^{٢}
مجموع مساحات الأوجه الجانبية = ٣٦ + ١٦ + ٤ = ٥٦ م^{٢}
التكاليف = ٥٦ × ٣ = ١٦٨ دينار -------------- (١)
مساحة الجزء الظاهر من الوجه العلوي للمكعب الأكبر = ٩ – ٤ = ٥ م^{٢}
بالمثل مساحة الجزء الظاهر من الوجه العلوي للمكعب الأوسط = ٤ – ١ = ٣ م^{٢}
مساحة الأوجه العلوية الظاهرة = ٥ + ٣ + ١ = ٩ م^{٢}
التكاليف = ٩ × ٥ = ٤٥ دينار ------------------- (٢)
من (١)، (٢) التكاليف الإجمالية = ١٦٨ + ٤٥ = ٢١٣ ديناراً .

السؤال 
٣



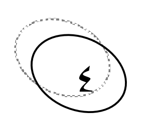
ما هي مساحة المربع المظلل بالنسبة لمساحة المربع الأكبر

الحـــــل

مساحة المربع المظلل = $\frac{١}{٢}$ مساحة] ب م جـ -------(١)

مساحة] ب م جـ = $\frac{١}{٤}$ مساحة المربع أ ب جـ د ------(٢)

من (١) ، (٢) مساحة الجزء المظلل = $\frac{١}{٨}$ مساحة المربع الأكبر

السؤال 
٤

ا س د
هـ ك
ل ص
ى و
ب ع جـ

أ ب جـ د مربع طول ضلعه م . نصفت أضلاعه ورسم المربع س ص ع ل ثم نصفت أضلاع المربع س ص ع ل .
ورسم منها مربع أخر. ثم نصفت أضلاع المربع الأخير ورسم مربعاً آخر من هذه المنصفات.
احسب مساحة المربع الأخير بدلالة م

الحـــــل

نصل س ع

هـ و = $\frac{١}{٢}$ س ع = $\frac{١}{٢}$ م

(طول ضلع المربع الأخير)^{٢} = $\left(\frac{١}{٢}\text{ م}^{٢}\right) + \left(\frac{١}{٢}\text{ م}^{٢}\right)$

= $\frac{٢}{١٦}$ م^{٢}

طول ضلع المربع الأخير = $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$ م

مساحة المربع الأخير = $\frac{١}{٨}$ م^{٢} .

السؤال ٥

ما هو عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بين عشرة ومائة، والتي كل منها، إذا كتب في النظام العشري و يزداد بمقدار تسعة، عند عكس وضع رقميه ؟

الحـــــل

نفرض أن رقم الآحاد = س ، وأن رقم العشرات = ١٠ص

منها :-

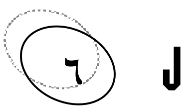
(ص + ١٠ س) – (س + ١٠ ص) = ٩

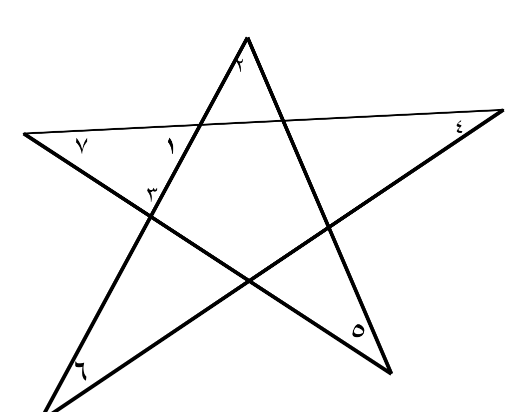
س – ص = ١

أي أن رقم الآحاد يزيد واحداً عن رقم العشرات

ومنها الأعداد هي :- ١٢ ، ٢٣ ، ٣٤ ، ٤٥ ، ٥٦ ، ٦٧ ، ٧٨ ، ٨٩ والتي عددها = ٨ أعداد

السؤال





على الشكل المجاور :-
احسب مجموع زوايا رؤوس النجمة الداخلية

(المصدر – الأستاذ / هاني سنبل – ابتدائية الوديعة)

الحـــــل

ق ∠ (١) = ق ∠ (٤) + ق ∠ (٦) **(زاوية خارجة عن المثلث)**

ق ∠ (٦) = ق ∠ (٢) + ق ∠ (٥)

ولكن [ق ∠ (١) + ق ∠ (٣) + ق ∠ (٧)] = ١٨٠°

∴ ق ∠ (٢) + ق ∠ (٤) + ق ∠ (٥) + ق ∠ (٦) + ق ∠ (٧) = ١٨٠°

السؤال 

الأعداد أ ، ب ، جـ ، ء تخضع لشروط التالية :

ء > جـ ، أ + ب = جـ + ء ، أ + ء < ب + جـ

رتب هذه الأعداد ترتيباً تنازلياً.

(المصدر – الأولمبياد الأمريكية الرياضية ١٩٧٠- المستوي الثالث)

الحـــــل

D أ + ب = جـ + د

E أ = جـ + د – ب ، ب = جـ + د – أ

بالتعويض في أ + ء < ب + جـ

٢ د < ٢ ب

E د < ب --------------- (١)

وكذلك

٢ أ < ٢ جـ

أ < جـ ----------------------- (٢)

ولكن ء > جـ ------------------ (٣) معطى

من (٢) ، (٣) أ < د -------- (٤)

من (١) ، (٣) ب< جـ -- ---- (٥)

من (٢) ، (٥) ب< أ ---- ---- (٦)

من (١) ← (٦) :- ب > ء > جـ > أ

السؤال ٨

إذا زاد عرض مستطيل ٦ أمتار ونقص طوله ٨ أمتار لما تغيرت مساحته ، ولو زاد العرض بقدر ١/٨ طوله ، ونقص الطول بقدر ٢/٥ عرضه لأصبح الشكل مربعاً . أوجد كل من طول وعرض المستطيل .

(المصدر – الأولمبياد الوطني الأردني للرياضيات ٢٠٠١ - المرحلة الثانية)

الحـــــل

نفرض أن :- عرض المستطيل = ص وطوله = س

(س + ٦) × (ص- ٨) = س × ص

س ص – ٨س + ٦ ص- ٤٨ = س ص

- ٨س + ٦ص = ٤٨ --------------------------- (١)

(س + ١/٨ ص) = (ص - ٢/٥ س)

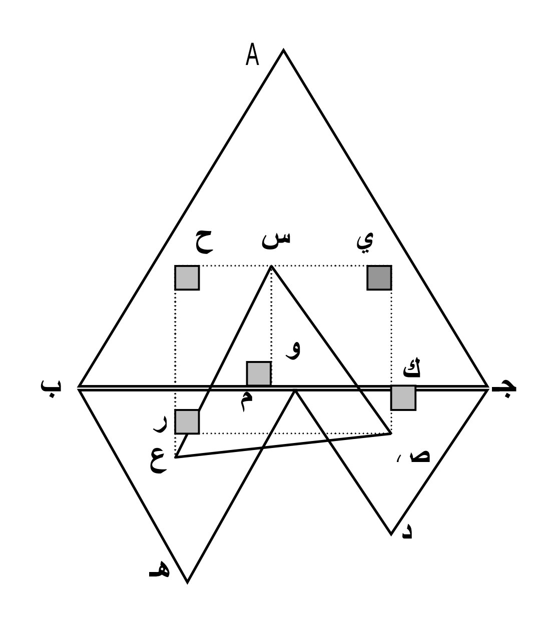
٨ س- ٥ ص = صفر ---------------------------- (٢)

من (١) ، (٢) :-

عرض المستطيل (س) = ٣٠ متر، طول المستطيل (ص) = ٤٨ متر.



السؤال ٩



على الشكل المجاور:-
أ ب جـ ، د جـ و ، هـ و ب ثلاثة مثلثات متطابقة الأضلاع،
س، ص ، ع مراكزها على الترتيب .
إثبت أن :-
المثلث س ص ع مثلث متطابق الأضلاع

(المصدر – الأستاذ / عبد المجيد مالك – متوسطة القيروان)

الحـــــل

نفرض أن:- طول ضلع] A ب جـ = ل

طول ضلع] جـ د و = ن

∴ طول ضلع ب و هـ] = ل- ن

ننشأ المثلث القائم ص ي س على س ص بحيث ي ص يمر بنقطة ك منتصف جـ و ، وبالمثل المثلث القائم س ح ع ، المثلث القائم ص ر ع ، ونصل س م حيث م منتصف ب جـ .

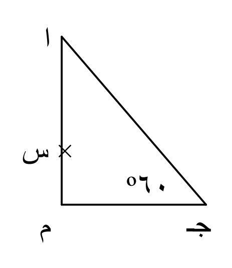
<u>أولا:-</u> في] ي ص س القائم في ∠ ي

ي س = ك م = جـ م – جـ ك = $\frac{1}{2}$ ل - $\frac{1}{2}$ ن

ي س = ي ك + ك ص

ي س = س م + ك ص

ولكن | A م | = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل



ولكن س نقطة تقاطع المتوسطات في المثلث أ ب جـ

س = $\frac{1}{3}$ A م ⟵ س م = $\frac{1}{3}$ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل = $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ل

بالمثل | ك ص | = $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ن

∴ | ي ص | = $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ل + $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ن

باستخدام نظرية فيثاغورث:-

$$(\text{س ص})^{2} = (\text{ي ص})^{2} + (\text{ي س})^{2}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\,\text{ل} + \frac{\sqrt{3}}{6}\,\text{ن}\right)^{2} + \left(\frac{\text{ل}}{2} - \frac{\text{ن}}{2}\right)^{2}$$

$$|\text{س ص}| = \sqrt{\frac{\text{ل}^{2} - \text{ن ل} + \text{ن}^{2}}{3}} \quad \text{----------------------------------} \quad (1)$$

<u>ثانيا</u>:- في ∆ س ح ع القائم في ∠ ح

$$\text{س ح} = \text{م ق} = \frac{\text{ل}}{2} - \left(\frac{\text{ل - ن}}{2}\right) = \frac{\text{ن}}{2}$$

$$\text{ح ع} = \text{ق ح} + \text{ق ع} = \text{س م} + \text{ق ع}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\,\text{ل} + \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\text{ل - ن}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{ل} - \frac{\sqrt{3}}{6}\,\text{ن}$$

$$\therefore\ (\text{س ع})^{2} = (\text{س ح})^{2} + (\text{ح ع})^{2}$$

$$(\text{س ع})^{2} = \frac{\text{ن}^{2}}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{ل} - \frac{\sqrt{3}}{6}\,\text{ن}\right)^{2}$$

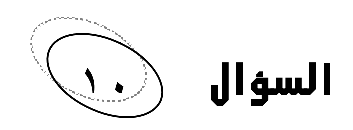
$$|\text{س ع}| = \sqrt{\frac{\text{ل}^{2} - \text{ن ل} + \text{ن}^{2}}{3}} \quad \text{--------------------------------} \quad (2)$$

<u>ثالثا</u>:- وبالمثل في ∆ ص ر ع القائم في ∠ ر

$$|\text{ص ع}| = \sqrt{\frac{\text{ل}^{2} - \text{ن ل} + \text{ن}^{2}}{3}} \quad \text{--------------------------------} \quad (3)$$

من (١) ، (٢) ، (٣) ∆ س ص ع متطابق الأضلاع

السؤال



إذا كانت مبيعات شركة بألوف الدنانير كما بالجدول :

السنة	١٩٨٩	١٩٩٣
المبيعات	٦٤٠	٨١٠

وكان نمو المبيعات يتخذ شكل العلاقة الخطية، فأوجد مبيعات الشركة بألوف الدنانير لعام ١٩٩١
(المصدر – الأولمبياد الوطني الأردني للرياضيات ٢٠٠١ - المرحلة الثانية)

الحـــــل

D العلاقة خطية : ص = م س + جـ

∴ ١٩٨٩ = ٦٤٠ س + جـ ------------------(١)

، ١٩٩٣ = ٨١٠ س + جـ ------------------(٢)

بالطرح

٤ = ١٧٠ س

$س = \frac{٤}{١٧٠}$

بالتعويض في (١) عن قيمة س

$١٩٨٩ = ٦٤٠ \times \frac{٤}{١٧٠} + جـ$

$جـ = \frac{١٧\times١٩٨٩ - ٤\times٦٤}{١٧} = \frac{٣٣٥٥٧}{١٧}$

$∴ ص = \frac{٤}{١٧٠} س + \frac{٣٣٥٥٧}{١٧}$ **(حيث أن المطلوب المبيعات لسنة ١٩٩١ Ü ص= ١٩٩١)**

$١٩٩١ = \frac{٤}{١٧٠} س + \frac{٣٣٥٥٧}{١٧}$

$\frac{١٩٩١\times١٧ - ٣٣٥٥٧}{١٧} = \frac{٤}{١٧٠} س$

$س = \frac{٢٩٠٠}{٤} = ٧٢٥$

مبيعات الشركة لسنة ١٩٩١ = ٧٢٥ ألف دينار



السؤال ١١

ضع في ابسط صورة :- $\sqrt{٥٩ + ٣٠\sqrt{٢}}$

(المصدر – كتاب لامي – ج . م . ع - الصف الثالث متوسط)

الحـــــل

$\sqrt{٥٩ + ٣٠\sqrt{٢}} = \sqrt{٥٠ + ٣٠\sqrt{٢} + ٩}$

$= \sqrt{(٥\sqrt{٢} + ٣)^{٢}}$

$= ٥\sqrt{٢} + ٣$

السؤال



إذا أعطيت مثلثاً ا ب جـ المتساوي الأضلاع والمثلث د هـ و المتساوي الأضلاع أيضاً ، فكيف تجد مثلثاً متساوي الأضلاع مساحته تساوي مجموع مساحتي المثلثين المعطيين ؟

(المصدر – طرق تدريس الرياضيات – المغيرة ١٩٨٩م)

الحـــــــل

إذا كان △ أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ل فإن :-

ارتفاعه = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ **ل**

وبالتالي مساحته = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}\,\text{ل}^{٢}$

وبالمثل:-

تكون مساحة المثلث د هـ و ،الذي فرضنا طول ضلعه ن = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}\,\text{ن}^{٢}$

نفرض أن طول ضلع المثلث المتطابق الأضلاع الذي

مساحته = مساحة △ أ ب جـ + مساحة △ د هـ و هو ع

$$\frac{\sqrt{٣}}{٤}\,\text{ع}^{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٤}\,\text{ل}^{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٤}\,\text{ن}^{٢}$$

$$\frac{\sqrt{٣}}{٤}\,\text{ع}^{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٤}\left(\text{ل}^{٢} + \text{ن}^{٢}\right)$$

$$\text{ع}^{٢} = \text{ل}^{٢} + \text{ن}^{٢}$$

$$\text{ع} = \sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ن}^{٢}}$$

أي أن طول ضلع المثلث المتساوي الأضلاع الذي مساحته تساوي مجموع مساحتي مثلثين آخرين يساوي الجذر التربيعي لمجموع مربعي طولي ضلعي المثلثين المعطيين.



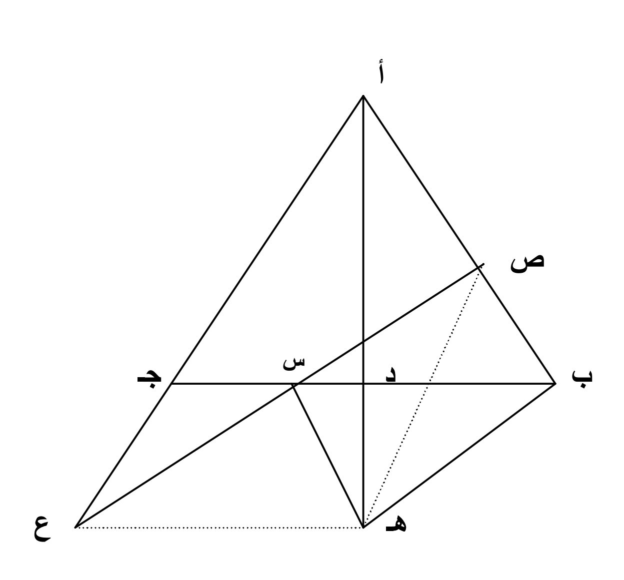
السؤال

أب جـ مثلث متساوي الساقين فيه أ ب = أ جـ . ارسم العمود أد من ا إلى القاعدة ب جـ ، ثم ارسم عمود من ب على أ ب ليلاقى امتداد أ د في هـ . خذ أي نقطة مثل س على ب جـ، صل هـ س ثم ارسم من س عمود على س هـ ليلاقى المستقيم اب في ص كما يلاقى المستقيم أجـ في ع . اثبت أن:-

س ص = س ع

(المصدر – الأولمبياد الوطني الأردني للرياضيات ٢٠٠١ - المرحلة الثانية)

الحـــــل



في الشكل ص ب س هـ

∠ ب =∠ س = ٩٠ °

ومنها يكون الشكل ص ب س هـ رباعياً دائرياً

، ∠ هـ ب س=∠ هـ ص س----------- (١)

من تشابه] ب هـ د ، أ هـ ب

∠ هـ ب س = ∠ ب أ هـ ----------- (٢)

ولكن أد محور تماثل للمثلث أ ب جـ

∠ ب أ هـ = ∠ جـ أ د ----------- (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

∠ هـ ص ع= ∠ هـ أ ع (مرسومتان على قاعدة واحدة هـ ع وفي جهة واحدة منها)

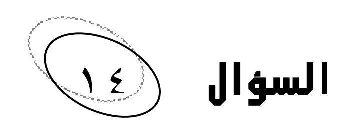
وعلى ذلك يكون الشكل ص هـ ع أ رباعياً دائرياً

ومن ذلك ∠ ب أ هـ = ∠ ص ع هـ -----------(٤)

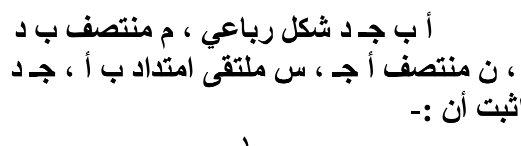
من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤)

∠ هـ ص س = ∠ ص ع هـ

أي أن س ص = س ع



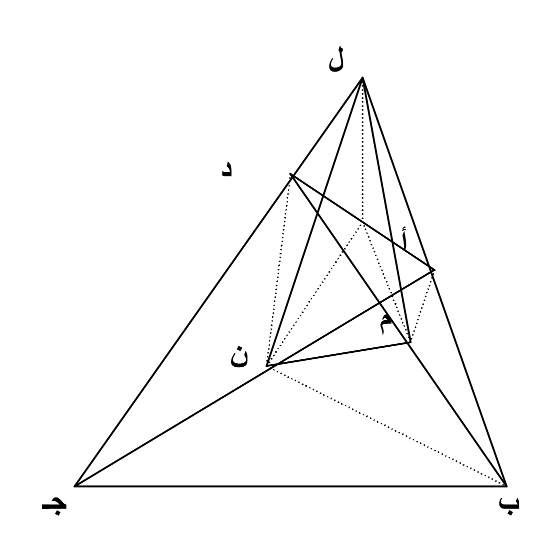
السؤال ١٤



أ ب جـ د شكل رباعي ، م منتصف ب د
، ن منتصف أ جـ ، س ملتقى امتداد ب أ ، جـ د
اثبت أن :-

مساحة] ل م ن = $\frac{١}{٤}$ مساحة الشكل أ ب جـ د

(المصدر – مجلة الرياضيات * ج . م . ع * العدد الأول)



الحـــل

ننصف أ د في س ثم نصل كل من :-

أ م ، ب ن ، دن ، س م ، س ن ، س ل

ن منتصف أ جـ

∴ مساحة] أ ب ن = $\frac{١}{٢}$ مساحة] أ ب جـ ---------------- (١)

∴ مساحة] أ د ن = $\frac{١}{٢}$ مساحة] أ د جـ ----------------- (٢)

بالجمع

مساحة الشكل أ ب ن د = $\frac{١}{٢}$ مساحة الشكل أ ب جـ د ----------------- (٣)

م منتصف ب د

∴ مساحة] أ م د = $\frac{١}{٢}$ مساحة] أ ب د ---------------- (٤)

∴ مساحة] ن م د = $\frac{١}{٢}$ مساحة] ن ب د ---------------- (٥)

بالجمع

مساحة الشكل أ م ن د = $\frac{١}{٢}$ مساحة الشكل أ ب ن د ----------------- (٦)

من (٣) ، (٦)

مساحة الشكل أ م ن د = $\frac{١}{٤}$ مساحة الشكل أ ب جـ د ------------------ (٧)

ولكن م منتصف د ب ، س منتصف أ د

∴ م س // ب أ

∴ مساحة] أ م س = مساحة] ل م س ------------------ (٨)

كذلك ن منتصف أ جـ ، س منتصف أ د

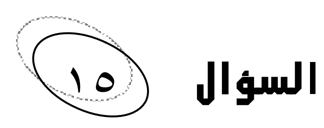
∴ س ن // جـ ل

∴ مساحة] د س ن = مساحة] ل س ن ------------------ (٩)

بجمع (٨) ، (٩) واضافة مساحة] س م ن للطرفين

∴ مساحة الشكل أ م د ن = مساحة] ل م ن ------------------ (١٠)

من (٦) ، (١٠) ..... مساحة] ل م ن = $\frac{١}{٤}$ مساحة الشكل أ ب جـ د

السؤال 

عين النقطة هـ على المستقيم جـ د في الشكل الآتي
بحيث تكون المسافة أ هـ + هـ ب أقصر ما يمكن .
حيث | أ جـ | = ٥ سم ، | ب د | = ٨ سم
| د جـ | = ١٣ سم ، ∠ د = ∠ جـ = ٩٠°

(المصدر – طرق تدريس الرياضيات – المغيرة ١٩٨٩م)

الحـــــل

بإجراء انعكاس للنقطة ب حول المستقيم د جـ
تنتج النقطة س كما يتضح في الشكل
وحيث أن الانعكاس يحافظ على الأطوال
∴ المسافة من النقطة ص إلى النقطة هـ ثم إلى النقطة ب = المسافة من النقطة ص إلى النقطة هـ ثم إلى النقطة س
وهذه المسافة الأخيرة هي أصغر ما يمكن عندما تكون النقاط { ص ، هـ ، س } على مستقيم واحد

من تشابه [ ] د هـ س ، جـ هـ ص

$$\frac{\text{دهـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{هـ س}}{\text{هـ ص}} = \frac{\text{دس}}{\text{جـ ص}}$$

$$\frac{\text{دهـ + جـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{هـ س + هـ ص}}{\text{ص هـ}} = \frac{\text{د س +ص جـ}}{\text{ص جـ}}$$

$$\frac{١٣}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{هـ س + هـ أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{٨ + ٥}{٥}$$

∴ | جـ هـ | = ٥ سم



السؤال

أوجد ناتج :-

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)$$

(المصدر – الأولمبياد الوطني الأمريكي للرياضيات - ١٩٨٦)

الحـــل

$$\left(\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)-\sqrt{7}\right)\left(\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)-\sqrt{7}\right)$$

$$\left(\sqrt{5}-\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\right)\left(-\sqrt{5}+\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\right)$$

$$=\left(\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)^{2}-7\right)\left(7-\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)^{2}\right)$$

$$=\left(5+6+2\sqrt{30}-7\right)\left(7-\left(5+6-2\sqrt{30}\right)\right)$$

$$=\left(4+2\sqrt{30}\right)\left(-4+2\sqrt{30}\right)$$

$$=120-16=104$$

السؤال (١٧)

إذا كانت ا + ب + جـ = صفراً . فاثبت أن :-

- **$أ^{٢}$ - ب جـ = $ب^{٢}$ - جـ أ = $جـ^{٢}$ - أ ب**
- **$ا^{٣}$ + $ب^{٣}$ + $جـ^{٣}$ = ٣ ا ب جـ**

(المصدر – مجلة الرياضيات * ج . م . ع * العدد الثاني – ديسمبر ١٩٨٢)

الحــــــل

من المعطيات أ + ب + جـ = صفراً

أ + ب = - جـ

بضرب الطرفين في أ – ب

$أ^{٢}$ – $ب^{٢}$ = ب جـ - أ جـ

$أ^{٢}$ – ب جـ = $ب^{٢}$ – أ جـ ------------------- (١)

وأيضاً أ + جـ = - ب وبضرب الطرفين في أ – جـ

$أ^{٢}$ – $جـ^{٢}$ = ب جـ - أ ب

$أ^{٢}$ – ب جـ = $جـ^{٢}$ – أ ب ------------------- (٢)

من (١) ، (٢) ينتج المطلوب الأول

من المعطيات أ + ب + جـ = صفراً

أ + ب = - جـ وبتكعيب الطرفين

$(أ + ب)^{٣}$ = - $جـ^{٣}$

$أ^{٣}$ + ٣ $أ^{٢}$ب + ٣ أ $ب^{٢}$ + $ب^{٣}$ = - $جـ^{٣}$

$أ^{٣}$ + $ب^{٣}$ + $جـ^{٣}$ = - ٣ أ ب (أ + ب)

= -٣ أ ب (- جـ) = ٣ أ ب جـ وهو المطلوب الثاني .

السؤال ١٨

حل المعادلة :-

$$٢^{١٩٩٤} + ٤^{٩٩٧} + ٨^{٦٦٥} = ١٦^{س}$$

(المصدر – المركز الوطني للعلوم الرياضية * المملكة العربية السعودية *– المسابقة الرابعة)

الحــــل

$$٢^{١٩٩٤} + (٢^{٢})^{٩٩٧} + (٢^{٣})^{٦٦٥} = ٢^{(٤س)}$$

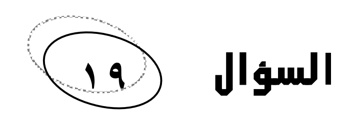
$$٢^{١٩٩٤} + ٢^{١٩٩٤} + ٢^{١٩٩٥} = ٢^{(٤س)}$$

$$٢^{١٩٩٤} + ٢^{١٩٩٤} + ٢ \times ٢^{١٩٩٤} = ٢^{(٤س)}$$

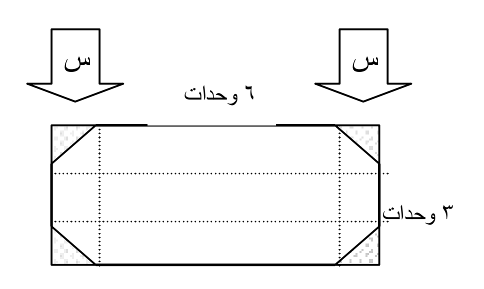
$$٢^{١٩٩٤} \times ٢^{٢} = ٢^{(٤س)}$$

$$٢^{١٩٩٦} = ٢^{(٤س)}$$

س = ٤٩٩ .



السؤال ١٩



إذا علمت أن المساحة غير المظللة في المستطيل أدناه تساوي ٦٢ سم٢ فاحسب المساحة المظللة علما بأن المثلثات المظللة متطابقة الضلعين

(المصدر – المركز الوطني للعلوم الرياضية * المملكة العربية السعودية *– المسابقة الرابعة)

الحــــل

نفر أن طول ضلع المثلث المطابق الضلعين = س " كما هو موضح في الرسم

المساحة الغير مظللة = ٤ × ($\frac{١}{٢}$ س^{٢}) + (٣ × س) + (٣ × س) + (٦ × س) + (٦ × ٣)

= ٢ س^{٢} + ١٨ س + ١٨ = ٦٢

س^{٢} + ٩ س - ٢٢ = صفر

(س - ٢) (س + ١١) = صفر ومنها س = ٢ لأن الحل - ١١ مرفوض

مساحة الجزء المظلل = ٤ × ($\frac{١}{٢}$ س^{٢}) = ٤ × ٢ = ٨ سم^{٢}

السؤال ٢٠

إذا كان س + ص = ٨ ، $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = \frac{٢}{٣}$ أوجد ما يلي :-

(ا) س × ص
(ب) $س^{٢} + ص^{٢}$

(المصدر – رابطة نشاطات الرياضيات - فلسطين)

الحـــــل

(أ) $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{س + ص}{س ص} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{٨}{س ص} = \frac{٢}{٣}$

س ص = ١٢ (وهو المطلوب أولاً)

(ب) س + ص = ٨ بتربيع الطرفين

$س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص = ٦٤$

$س^{٢} + ص^{٢} + ٢٤ = ٦٤$

$س^{٢} + ص^{٢} = ٦٤ - ٢٤ = ٤٠$ (وهو المطلوب ثانياً)

السؤال (٢١)

إذا كان $٢^{س} \times ٢^{ص} = ٣٢ \times ١٢٨$ احسب قيمة:-

(أ) $\sqrt{٣ (س + ص)}$

(ب) $س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$

(المصدر – رابطة نشاطات الرياضيات - فلسطين)

الحـــــل

(أ) $٢^{س} \times ٢^{ص} = ٣٢ \times ١٢٨$

$٢^{س} \times ٢^{ص} = ٢^{٥} \times ٢^{٧} = ٢^{١٢}$

$٢^{س+ص} = ٢^{١٢}$

$س + ص = ١٢$

$\sqrt{٣ (س + ص)} = ٦ ، -٦$ **(المطلوب أولاً)**

(ب) $س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$

$س + ص = ١٢$ **بتربيع الطرفين**

$س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} = ١٤٤$ **(المطلوب ثانياً)**

السؤال ٢٢

استورد وكيل شركة نوكيا للهواتف المحمولة ١٧٨٠ هاتفاً محمولاً، واستورد وكيل شركة سوني ٢٠١٩ هاتفاً محمولاً، كما استورد وكيل شركة سامسونج ٥٥٥٧ هاتفاً محمولاً. أراد الوكلاء توزيع جميع ما استوردوه على عدد من التجار المحليين بالتساوي. وعند القيام بذلك وجد وكيل شركة نوكيا أنه بعد توزيع هواتفه يبقى لديه عدداً من الهواتف، فاقترح وكيل شركة سوني أن يشتري منه العدد المتبقي لأنه بذلك يستطيع بيع هواتفه بالتساوي على التجار، ولكن وكيل شركة نوكيا أعتذر لوكيل سوني لأنه سبق وأن اقترح وكيل سامسونج على وكيل نوكيا شراء العدد المتبقي للسبب نفسه. ما هو عدد التجار المحليين للهواتف المحمولة.

(المصدر – المركز الوطني للعلوم الرياضية * المملكة العربية السعودية *– المسابقة الخامسة)

الحـــــل

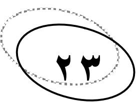
نلاحظ أن الموزعين هو قاسم مشترك للعددين

١٧٨٠ + ٢٠١٩ = ٣٧٩٩ = ٢٩ × ١٣١

١٧٨٠ + ٥٥٥٧ = ٧٣٣٧ = ١١ × ٢٣ × ٢٩

وهذا القاسم المشترك الأكبر هو عدد أولي ، لذا فإن عدد الموزعين ٢٩

السؤال ٢٣



عندما يكون الجمل عطشاناً، فإن ٨٤% من وزنه ماء، وبعد أن يشرب يرتفع وزنه إلى ٨٠٠ كجم، وعندها يمثل الماء ٨٥% من وزنه . ما هو وزن الجمل عندما يكون عطشاناً.

(المصدر – التصفية الأولى للأولمبياد البحريني – ٢٠٠٤ – ٢٠٠٥م)

الحـــــل

نوجد وزن الماء في الحالة الثانية (بعد شرب الماء)

$\frac{\text{وزن الماء}}{\text{٨٠٠ كجم}} = \frac{٨٥}{١٠٠}$ ⟵ **وزن الماء = ٦٨٠ كجم**

وزن الجمل عطشاناً: نفرض أن وزن الماء = س كجم

$\frac{\text{س}}{\text{١٢٠ + س}} = \frac{٨٤}{١٠٠}$ ⟵ **س = ٦٣٠ كجم**

وزن الجمل عندما يكون عطشاناً = ١٢٠ + ٦٣٠ = ٧٥٠ كجم .

السؤال (٢٤)

عدد أكبر من مربع العدد ٤٤، وأصغر من مربع العدد ٤٥، وهو من مضاعفات العدد١٣، ومربع العدد ٥ أحد عوامله. ما هو هذا العدد ؟

(المصدر – التصفية الأولى للأولمبياد البحريني – ٢٠٠٤ – ٢٠٠٥م)

الحـــــل

نفرض العدد = س

$(٤٤)^{٢} < س < (٤٥)^{٢}$

$١٩٣٦ < س < ٢٠٢٥$

ولكن ١٣، ٢٥ من عوامل س

١٣ × ٢٥ = ٣٢٥ من عوامل س أيضا (المضاعف المشترك)

نبحث عن عدد من مضاعفات العدد ٣٢٥ ويقع بين ١٩٣٦ ، ٢٠٢٥

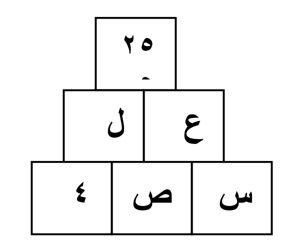
بالتجريب نجد أن : ٣٢٥ × ٦ = ١٩٥٠

س = ١٩٥٠ لأن ١٩٣٦ < ١٩٥٠ < ٢٠٢٥

السؤال (٢٥)

في الشكل التالي :-

إذا كان حاصل جمع كل مربعين يساوي المربع الذي فوقهما ، إذا كان مجموع الأعداد في الصف الثالث يساوي ١٧ ، فما قيمة كل من س، ص ،ع ، ل



(المصدر – التصفية الأولى للأولمبياد البحريني – ٢٠٠٤ – ٢٠٠٥م)

الحـــــل

في الصف الثالث : س + ص + ٤ = ١٧

ومنها س + ص = ١٣ = ع

في الصف الثاني : ع + ل = ٢٥

ومنها ١٣ + ل = ٢٥ ------ ل = ١٢

ص + ٤ = ١٢ ------ ص= ٨ ، س = ٥

السؤال (٢٦)

شجرة فيها ١٠ فروع، وكل فرع فيه ١٠أغصان كبيرة، وكل غصن كبير فيه ١٠ شعب، وكل شعبة فيها ١٠ أوراق. وفي أحد الأيام قطع أحد المزارعين فرعاً واحداً من الشجرة، ثم قطع غصناً كبيراً من فرع آخر، ثم قطع شعبة واحدة من غصن كبير لآخر، ثم قطع ورقة واحدة من شعبة أخرى. فكم عدد الأوراق المتبقية في الشجرة.

(المصدر – التصفية الأولى للأولمبياد البحريني – ٢٠٠٤ – ٢٠٠٥م)

الحـــل

عدد الأوراق في الشعبة الواحدة = ١٠ أوراق
عدد الأوراق في الغصن الكبير الواحد = ١٠ شعب × ١٠ أوراق
عدد الأوراق في الفرع الواحدة = ١٠ أغصان كبيرة × ١٠ شعب × ١٠ أوراق = ١٠٠٠ ورقة
عدد الأوراق في الشجرة = ١٠ فروع × ١٠٠٠ ورقة = ١٠٠٠٠ ورقة

ما قطه المزارع هو :-
فرع واحد = ١٠٠٠ ورقة
غصن كبير واحد من فرع آخر = ١٠٠ ورقة
شعبة واحدة من غصن كبير آخر = ١٠ أوراق
ورقة واحدة من شعبة أخرى

إذن مجموع أعداد الأوراق التي قطعها = ١٠٠٠ + ١٠٠ + ١٠ + ١ = ١١١١ ورقة

عدد الأوراق الباقية في الشجرة = ١٠٠٠٠ – ١١١١ = ٨٨٨٩ ورقة .

السؤال (٢٧)

علي الشكل :-

أ س ، أ ص مستقيمان متعامدان يمسان الدائرة م في س ، ص ، |أ ب| = |أ جـ|
احسب مساحة الدائرة إذا علمت أن مساحة سطح المثلث ا ب جـ = ٩ وحدات مربعة
(المصدر – مسابقة مدارس كولومبيا البريطانية – ٢٠٠٤)

أ جـ ص ع ب س م

الحـــــل

نصل م س ، م ب، م جـ ، م ص ، م ع

نفرض أن |أ ب| = |أ جـ| = α

D |أ س| = |أ ص| **(مماسان للدائرة من نقطة واحدة)**

، D |أ ب| = |أ جـ|

E بالطرح |ب س| = |جـ ص|

ولكن |ب س| = |ب ع| ، |ع جـ| = |جـ ص| (مماسات للدائرة من نقط خارجها)

E |ب س| = |ب ع| = |ع جـ| = |جـ ص|

نفرض أن |ب س| = |ب ع| = |ع جـ| = |جـ ص| = β

D مساحة سطح] أ ب جـ = ٩ سم^2

E $\frac{1}{2}\alpha^2$ = ٩ ومنها α^2 = ١٨ ، α = ٣ $\sqrt{2}$ ------------------ (١)

من نظرية فيثاغورث في] أ ب جـ

|ب جـ|^2 = |أ ب|^2 + |أ جـ|^2

$(2\beta)^2 = \alpha^2 + \alpha^2$

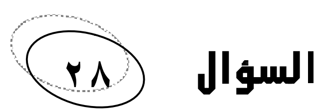
بالتعويض عن قيمة α^2

E ٤ β^2 = ٣٦ ومنها β = ٣

ولكن الشكل أ س م ص مربع

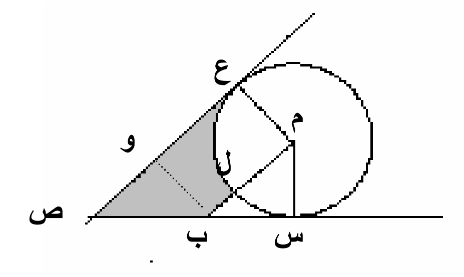
E نق = |أ س| = $\alpha + \beta$ = ٣ $\sqrt{2}$ + ٣ سم

مساحة الدائرة = ٩ ط ($\sqrt{2}$ + ١)^2 سم^2



السؤال ٢٨





على الشكل :-

المستقيمان س ص ، ص ع يمسان الدائرة (م ، ٣)في س ، ع ، رسم م ب يوازي ع ص فإذا كان | س ب | = ٤ سم فاحسب مساحة الجزء المظلل

(المصدر – مسابقة مدارس كولومبيا البريطانية – ٢٠٠٤)

الحـــــل

نسقط العمود ب و على المستقيم ع ص

وعلى ذلك تكون مساحة الجزء المظلل =

(مساحة المستطيل م ب و ع - مساحة القطاع م ع ل) + مساحة سطح] ب و ص

أولا : مساحة المستطيل م ب و ع

D م س ⊥ س ص

E من نظرية فيثاغورث | م ب | = ٥سم

D | م ع | = نق =٣ سم

E مساحة المستطيل = ١٥ سم ^{٢}

ثانيا : مساحة القطاع م ع ل

D ق (∠ ع م ب) = ٩٠°

E مساحة القطاع = $\frac{١}{٤}$ مساحة الدائرة

= $\frac{١}{٤}$ × ط × ٩ = $\frac{٩}{٤}$ ط

ثالثا : مساحة سطح] ب و ص

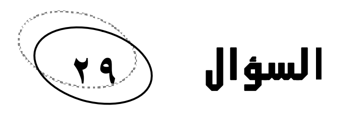
من تطابق]] ب ص و ، م ب س

E | س ب | = | و ص | = ٤ سم

E مساحة سطح] ب و ص = ٦ سم ٢

وعلى ذلك تكون مساحة الجزء المظلل = (١٥ - $\frac{٩}{٤}$ ط + ٦)

= ٢١ - $\frac{٩}{٤}$ ط سم ^{٢}

السؤال 

إذا كان:- س ص = ٥ ، س^{٢} ص + س ص^{٢} + س + ص = ٤٢

فاحسب القيمة العددية للمقدار س^{٢} + ص^{٢}

(المصدر – مسابقة مدارس كولومبيا البريطانية – ٢٠٠٤)

الحـــــل

D س^{٢} ص + س ص^{٢} + س + ص = ٤٢

E س (س ص) + ص (س ص) + س + ص = ٤٢

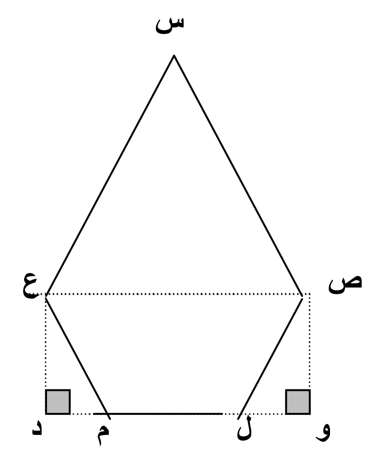
D س ص = ٥

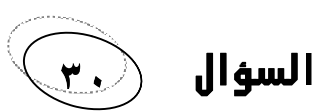
E ٥ س + ٥ ص + س + ص = ٤٢

E س + ص = ٧ بالتربيع

س^{٢} + ٢س ص+ ص^{٢} = ٤٩

E س^{٢} + ص^{٢} = ٤٩ - ١٠ = ٣٩



السؤال 

على الشكل :-

ق ∠ (ل) = ق ∠ (م) = ١٢٠° ،

| ص ل | = | ل م | = | م ع | = ٢ سم

| س ص | = | س ع | = ٤ سم

أوجد مساحة الشكل س ص ع م ل

(المصدر – مسابقة مدارس كولومبيا البريطانية – ٢٠٠٤)

الحـــــل

نصل ص ع ، ونسقط العمودان ص و ، ع د على المستقيم ل م

E الشكل ص و د ع مستطيل

في المثلث ص و ل القائم في ∠ و

D | ل ص | = ٢ سم

E | ص و | = $\sqrt{٣}$ سم | و ل | = ١ سم

بالمثل في المثلث ع م د

E | و د | = | ص ع | = ٤ سم

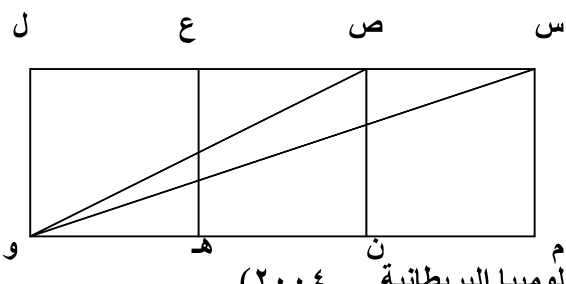
E مساحة شبه المنحرف ص ل م ع = $\frac{١}{٢}$ (٢ + ٤) × $\sqrt{٣}$ = ٣$\sqrt{٣}$ سم^{٢}

ولكن مساحة المثلث س ص ع = ٤ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

E المساحة الكلية للشكل = ٧ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

السؤال



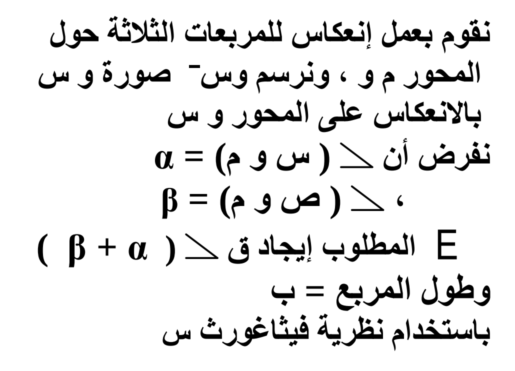


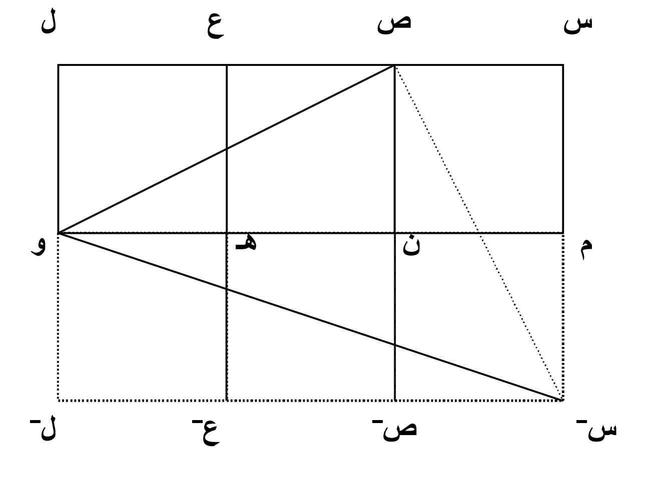
على الشكل ثلاث مربعات متطابقة

أوجد: ق ∠ (س و م)+ ق ∠ (ص و م)

(المصدر – مسابقة مدارس كولومبيا البريطانية – ٢٠٠٤)

الحـــــل





نقوم بعمل إنعكاس للمربعات الثلاثة حول المحور م و ، ونرسم وس⁻ صورة و س بالانعكاس على المحور و س

نفرض أن ∠ (س و م) = α

، ∠ (ص و م) = β

E المطلوب إيجاد ق ∠ (α + β)

وطول المربع = ب

باستخدام نظرية فيثاغورث س

|ص و|^{٢} = ب^{٢} + (٢ب)^{٢}

= ٥ ب^{٢} ------------(١)

بالمثل |س⁻ ص|^{٢} = ٥ ب^{٢} ------------(٢)

، |س و|^{٢} = ١٠ ب^{٢} ------------(٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

|س⁻ و|^{٢}= |ص و|^{٢} + |س⁻ و|^{٢}

E المثلث ص و س⁻ متطابق الضلعين وقائم في ∠ ص

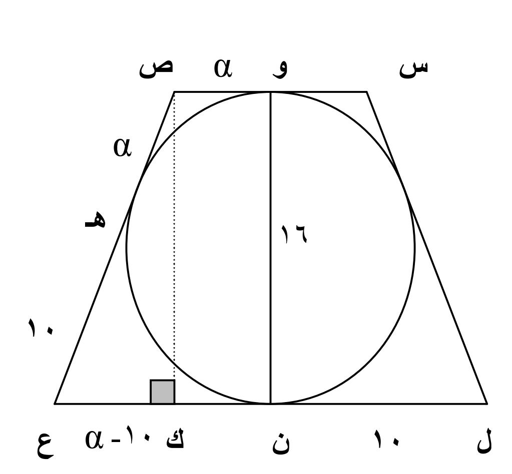
E ق ∠ (α + β) = ٤٥°

السؤال (٣٢)

دائرة (م ، ٨) مرسومة داخل شبه منحرف متطابق الضلعين قاعته الكبرى ٢٠ سم ، احسب مساحة شبه المنحرف

(المصدر – مسابقة مدارس كولومبيا البريطانية – ٢٠٠٢)

الحـــــل



نفرض أن شبه المنحرف هو س ص ع ل

نسقط من ص العمود ص ك يلاقي ل ع في النقطة ك

نفرض أن | و ص | = α

D شبه المنحرف س ص ع ل متطابق الضلعين
والدائرة م تمس أضلاعه من الداخل

E المستقيم و ن محور تماثل له يمر بمركز الدائرة م
كما يتضح من الرسم :-

في] ص ك ع القائم في ∠ ك

| ك ع | = | ن ع | - | ن ك |

، D | ن ك | = | و ص | = α

E | ك ع | = ١٠ - α

D | ع ص | = | ع هـ | + | هـ ص |

، D | هـ ص | = | و ص | = ١٠ سم (مماسان للدائرة من نقطة خارجها)

E | ع ص | = ١٠ + α

، D | و ن | = | ص ك | = ٢ نق = ١٦

باستخدام نظرية فيثاغورث

| ع ص |^{٢} = | ص ك |^{٢} + | ك ع |^{٢}

(١٠ + α)^{٢} = (١٦)^{٢} + (١٠ - α)^{٢}

١٠٠ + ٢٠α + α^{٢} = ٢٥٦ + ١٠٠- ٢٠α + α^{٢}

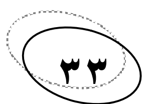
٤٠α = ٢٥٦

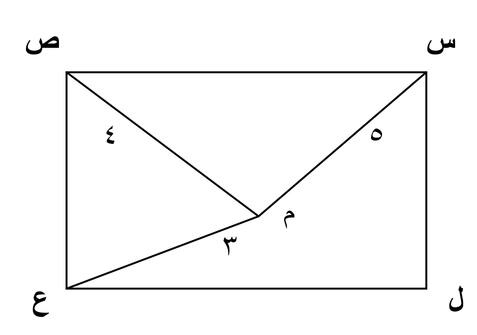
α = $\frac{٣٢}{٥}$ سم

| س ص | = ٢ α = $\frac{٦٤}{٥}$ سم

مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ (٢٠ + $\frac{٦٤}{٥}$) × ١٦

= ٨ × $\frac{١٦٤}{٥}$ = $\frac{١٣١٢}{٥}$ سم^{٢}

السؤال 



على الشكل :

س ص ع ل مستطيل فيه :-

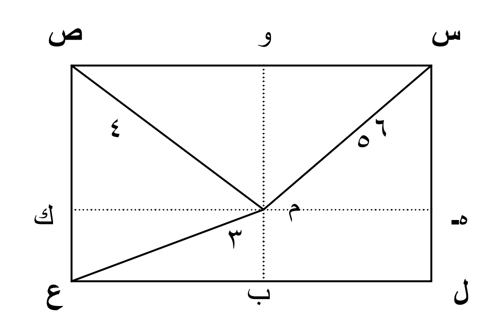
م نقطة داخله بحيث $|\text{س م}| = ٥$ سم

، $|\text{ص م}| = ٤$سم ، $|\text{ع م}| = ٣$ سم

احسب : $|\text{ل م}|$

(المصدر – مسابقة مدارس كولومبيا البريطانية – ٢٠٠٢)

الحـــــل



نرسم و ب يمر بالنقطة م ويوازي ضلعى المستطيل س ل ، ص ع وبالمثل نرسم هـ ك يواز ضلعي المستطيل الآخرين س ص ، ل ع

أولا : في المستطيل هـ م و س

$|\text{هـ م}|^{٢} + |\text{و م}|^{٢} = (٥)^{٢} = ٢٥$ -----(١)

ثانيا : في المستطيل و م ك ص

$|\text{ك م}|^{٢} + |\text{و م}|^{٢} = (٤)^{٢} = ١٦$ ----(٢)

ثالثا : في المستطيل ك ع ب م

$|\text{م ب}|^{٢} + |\text{م ك}|^{٢} = (٣)^{٢} = ٩$ -----(٣)

بطرح المعادلة (٢) من المعادلة (١)

$|\text{هـ م}|^{٢} - |\text{ك م}|^{٢} = ٩$ -----(٤)

بجمع المعادلتين (٣) ، (٤)

$|\text{م ب}|^{٢} + |\text{هـ م}|^{٢} = ١٨$

E قطر المستطيل هـ م ب ل = $|\text{ل م}| = \sqrt{١٨} = ٣\sqrt{٢}$ سم

السؤال 

على الشكل :-
توجد ٧ مستطيلات متطابقة داخل مستطيل كبير مساحته = ٣٣٦ سم ٢

(المصدر – مسابقة مدارس كولومبيا البريطانية – ٢٠٠٢)

الحــــل

نفرض أن طول المستطيل الصغير = س

، وعرضه = ص حيث س > ص

∴ طول المستطيل الكبير = ٤ص أو = ٣ س -----------(١)

وعرضه = س + ص

من (١) ∴ ص= $\frac{٣}{٤}$ س

∴ مساحة المستطيل الكبير = ٣ س (س + ص)

∴ ٣س (س + $\frac{٣}{٤}$ س) =٣٣٦

∴ ٣س ^{٢} + $\frac{٩}{٤}$ س ^{٢} = ٣٣٦

∴ $\frac{٢١}{٤}$ س ^{٢} =٣٣٦

∴ س = ٨ ومنها ص = ٦

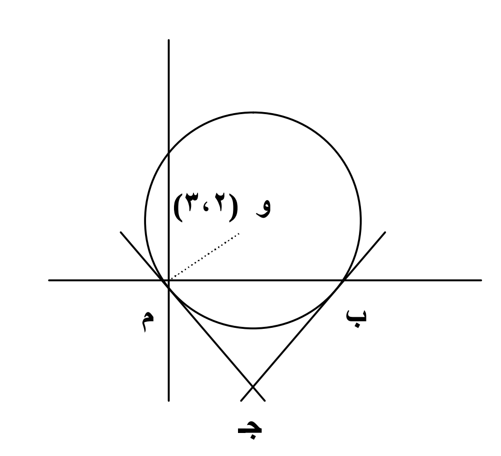
∴ محيط المستطيل = (٤ × ٦) + (٤ × ٦) + (٦ + ٨) + (٦ + ٨) = ١٤٤ سم .

السؤال (٣٥)

دائرة مركزها النقطة (٣، ٢) رسمت بالنسبة للمستوى الإحداثي س ،ص والذي نقطة الأصل فيه م ، رسم مماسان للدائرة من نقطة جـ يمساها في النقطتين م ، ب حيث ب تقع على المحور الإحداثي السيني احسب الإحداثي الصادي للنقطة جـ .

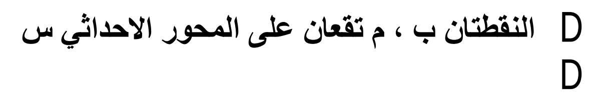
(المصدر – مسابقة مدارس كولومبيا البريطانية – ٢٠٠٢)

الحـــــل



نفرض أن مركز الدائرة هو النقطة و

E |م و| = |و ب| ، |م جـ| = |ب جـ|


D النقطتان ب ، م تقعان على المحور الاحداثي س

D

E احداثيا النقطة جـ = (٣ ، ص) حيث ص < صفر

D ميل المستقيم م و = $\frac{٢}{٣}$

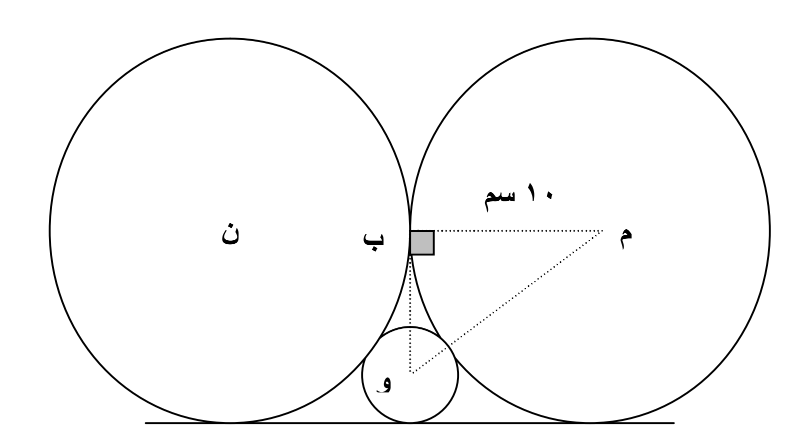
،D م و ⊥ م جـ

E ميل المستقيم م جـ = - $\frac{٣}{٢}$

ولكن ميل المستقيم م جـ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{\text{صفر - ص}}{\text{صفر - ٣}}$ = - $\frac{٣}{٢}$

E - ٢ ص = ٩

E الاحداثي الصادي لنقطة جـ = - $\frac{٩}{٢}$



السؤال ٣٦

على الشكل :-
الدائرتان (م،١٠) ،(ن ، ١٠)
والدائرة (و ، نق) متماسات من الخارج كما بالشكل ،
احسب نصف قطر الدائرة الصغرى

(المصدر – مسابقة مدارس كولومبيا البريطانية – ٢٠٠٢)

الحـــــل

نصل كل من : م ب، ب و ، م و

في] م ب و :-

D **ب و مماس للدائرة م**

E **م ب ⊥ ب و**

، **|ب و| = ١٠ – نق**

، **|م و| = ١٠ + نق**

E **باستخدام نظرية فيثاغورث**

E **(١٠ + نق)^{٢} = (١٠)^{٢} + (١٠ - نق)^{٢}**

E **١٠٠ + ٢٠ نق + نق^{٢} = ١٠٠ + ١٠٠ - ٢٠ نق + نق^{٢}**

E **٤٠ نق = ١٠٠**

E **نق = ٢,٥ سم**

السؤال (٣٧)

احسب س ص ع اذا كان :

$س + ص + ع = ١$ ، $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٢$ ، $س^٣ + ص^٣ + ع^٣ = ٣$

(المصدر – مسابقة مدارس كولومبيا البريطانية – ٢٠٠٢)

الحـــــل

نفرض أن:

$س + ص + ع = ١$ ----------------- (١)

$س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٢$ ----------------- (٢)

$س^٣ + ص^٣ + ع^٣ = ٣$ ----------------- (٣)

بتربيع المعادلة (١)

$$(س + ص + ع)^٢ = س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢\ (س ص + ص ع + س ع)$$

$$١ = ٢ + ٢\ (س ص + ص ع + س ع)$$

$$٢\ (س ص + ص ع + س ع) = -١$$

$$س ص + ص ع + س ع = -\frac{١}{٢}$$

بتكعيب المعادلة (١)

$$(س + ص + ع)^٣ = س^٣ + ص^٣ + ع^٣ + ٣(س + ص + ع)\ (س ص + ص ع + س ع) - ٣\ س ص ع$$

$$١ = ٣ + ٣ \times ١ \times -\frac{١}{٢} - ٣\ س ص ع$$

$$١ = ٣ - \frac{٣}{٢} - ٣\ س ص ع$$

$$٣\ س ص ع = \frac{٣}{٢} - ١$$

$$٣ س ص ع = \frac{١}{٢}$$

$$س ص ع = \frac{١}{٦}$$

السؤال (٣٨)

أوجد قيمة (س، ص ، ع) التي تحقق النظام التالي :-

(س+ ص) (س + ص + ع) = ١٢٠
(ص + ع) (س + ص + ع) = ٩٦
(س+ ع) (س + ص + ع) = ٧٢

(مسابقة مدارس (M –A – T –H) الثانوية الأمريكية)

الحـــــل

نفرض أن :-

(س+ ص) (س + ص + ع) = ١٢٠ ------------ (١)
(ص + ع) (س + ص + ع) = ٩٦ ------------ (٢)
(س+ ع) (س + ص + ع) = ٧٢ ------------ (٣)

بجمع المعادلات (١) ، (٢) ، (٣)
(س+ ص) (س + ص + ع) + (ص + ع) (س + ص + ع)
+ (س+ ع) (س + ص + ع) = ٢٨٨

E (س + ص + ع) [(س+ ص) + (ص + ع) + (س+ ع)] = ٢٨٨
(س + ص + ع) (٢س +٢ ص + ٢ع) =٢٨٨

٢ (س + ص + ع) (س + ص + ع) = ٢٨٨

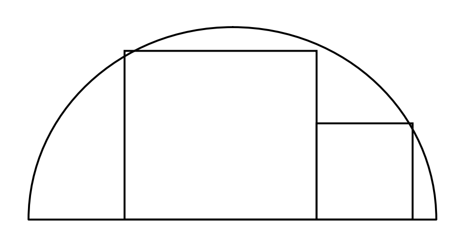
$(س + ص + ع)^{٢}$ = ١٤٤

E س + ص + ع = ± ١٢

بالتعويض في المعادلة (١)
(س+ ص) = ± ١٠ ------------ (٤)
بالمثل في المعادلتان (١) ، (٣)
(ص + ع) = ± ٨ ------------ (٥)
(س+ ع) = ± ٦ ------------ (٦)

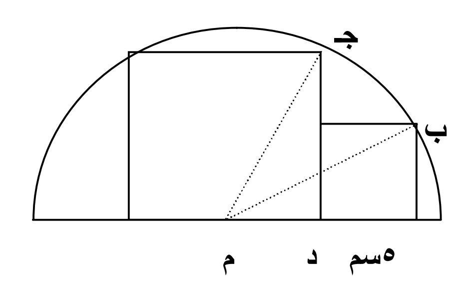
بحل المعادلات (٤) ، (٥) ،(٦)
E (س، ص ، ع) = (٤، ٦ ، ٢) ، (-٤ ، -٦ ، -٢)

السؤال 



على الشكل :-
مربعان مرسومان داخل نصف دائرة ،
احسب مساحة المربع الأكبر إذا علمت أن :
مساحة المربع الأصغر = ٢٥ سم^{٢}

الحـــــل



نفرض:- م مركز الدائرة
، | د م | = س

D | د م | = $\frac{١}{٢}$ **طول ضلع المربع الأكبر**

E **طول ضلع المربع الأكبر = ٢ س**

D | ب م |^{٢} = ٢٥ + (٥ + س)^{٢}
D
D | جـ م |^{٢} = س^{٢} + (٢ س)^{٢}
ولكن
| جـ م |^{٢} = | ب م |^{٢} = **نصف قطر الدائرة**

E ٢٥ + (٥ + س)^{٢} = س^{٢} + (٢ س)^{٢}

٢٥ + ٢٥ + ١٠س + س^{٢} = س^{٢} + ٤ س^{٢}

٤ س^{٢} ــ ١٠س ــ ٥٠ = ٠

٢ س^{٢} ــ ٥س ــ٢٥ = ٠

(س ــ ٥) (٢س + ٥) = ٠

ومنها : س= ٥

E **طول ضلع المربع الأكبر = ٢ × ٥ = ١٠**

E **مساحة المربع الأكبر ١٠٠ سم^{٢}**

السؤال (٤٠)

إذا كانت س ، ص ، ع أي ثلاث حدود متتالية في المتتابعة التالية :-

$(٢ + ١)$ ، $(٢^{٢} + ٢)$ ، $(٢^{٣} + ٣)$ ، $(٢^{٤} + ٤)$ ، $(٢^{٥} + ٥)$ ،..........

اثبت ان :-

٣ ص= ٢ س +ع + ١ حيث $س < ص < ع$.

(المصدر – مجلة الرياضيات ج- م – ع / العدد الثاني – ديسمبر ١٩٨٢م)

الحــــــل

نفرض أن :-

س = $٢^{ن}$ + ن

E ص = $٢^{ن}$ + ن + ١

، ع = $٢^{ن}$ + ن +٢

E الطرف الأيسر :-

٢ س +ع + ١ = ٢ ($٢^{ن}$ + ن) + ($٢^{ن}$ + ن +٢) + ١

= $٢^{ن+١}$ + ٢ن + $٢^{ن}$ + ن + ٢ + ١

= $٢^{ن+١}$ + $٢^{ن}$ + ٣ن + ٣

= $٢^{ن}$ (١ + ٢) + ٣ ن + ٣

= ٣ ×($٢^{ن}$+ ٣ ن + ٣)

= ٣ ($٢^{ن}$+ ن + ١)

= ٣ ص .

السؤال (٤١)

إذا كانت مقادير الزوايا الداخلية لمضلع محدب في توال عددي وكان أصغر هذه الزوايا = ١٠٠° ومقدار أكبر زاوية أكبر هذه الزوايا = ١٤٠ ° فما هو عدد أضلاع هذا المضلع .

(المصدر – المسابقات الأمريكية للرياضيات - مارس ١٩٧٦م)

الحـــــل

نفرض أن عدد الأضلاع ن

E مجموع زوايا المضلع = (٢ن – ٤) × ٩٠° ---------------- (١)

D جـ = $\frac{١}{٢}$ ن (أ + ل)

E مجموع زوايا المضلع = $\frac{١}{٢}$ ن (١٠٠° + ١٤٠°)

= ١٢٠ × ن ---------------- (٢)

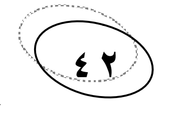
من (١) ، (٢)

(٢ن – ٤) × ٩٠° = ١٢٠° × ن

١٨٠° ن – ٣٦٠° = ١٢٠° ن

٦٠ ن = ٣٦٠°

ن = ٦

السؤال  ٤٢

أي التقارير التالية يكافئ التقرير التالي :

إذا كان الفيل القرنفلي على الكوكب ألفا له عيون أرجوانية فإن الأسد المتوحش على الكوكب بيتا لا يكون له أنف طويل .

١. **إذا كان الأسد المتوحش على الكوكب بيتا ذا أنف طويل فإن الفيل القرنفلي اللون على الكوكب ألفا يكون له عيون أرجوانية .**

٢. **إذا كان الفيل القرنفلي اللون على الكوكب ألفا ليس له عيون أرجوانية فإن الأسد المتوحش على الكوكب بيتا لا يكون له أنف طويل .**

٣. **إذا كان الأسد المتوحش على الكوكب بيتا له أنف طويل فإن الفيل القرنفلي اللون على الكوكب ألفا لا يكون له عيون أرجوانية .**

٤. **الفيل القرنفلي اللون على الكوكب ألفا ليس له عيون أرجوانية أو الأسد المتوحش على كوكب بيتا ليس له أنف طويل .**

(المصدر – المسابقات الأمريكية للرياضيات - مارس ١٩٧٦م)

الحــــل

نرمز للتقريرين : الفيل ذو اللون القرنفلي على الكوكب ألفا له عيون ارجوانية ، والأسد المتوحش على الكوكب بيتا له أنف طويل بالرمزين ق ،ك على الترتيب .
فيكون التقرير المعطى هو : ق o e ك
ومنها التقارير الأربعة الأخرى هي

(١)ك o ق
(٢) e ق o e ك
(٣)ك o e ق
(٤) e ق C e ك

وهذه التقارير تكافيء على الترتيب :

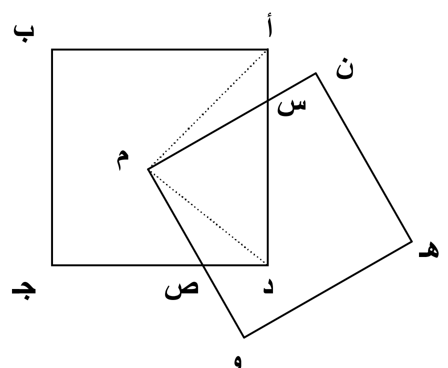
e كC ق ، ق C e ك ، e ك C e ق ، e ق C e ك

D **التقرير المعطى هو : ق o e ك يكافيء التقرير: e ق C e ك**

E **الحل هو الإختيارين ٣ ، ٤**

السؤال





في الشكل المجاور :-
أ ب جـ د مربع مركزه م ، م ن هـ و
مربع آخر طول ضلعه ١٠ سم ،
احسب مساحة الشكل س م ص د .

(المصدر – الأولمبياد الوطني الأردني للرياضيات ٢٠٠١ - المرحله التانيه)

الحـــــل

نصل أ م ، م د

D ∠ أ م د = ∠ أ م س + ∠ س م د = ٩٠ º --------------(١)

، D ∠ ن م ص = ∠ د م ص + ∠ س م د = ٩٠ º --------------(٢)

من (١) ، (٢)

E ∠ أ م س = ∠ د م ص

D [ ] أ م س ، د م ص

فيهما
- **| أ م | = | د م |**
- **∠ أ م س = ∠ د م ص**
- **∠ م أ س = ∠ م د جـ = ٤٥ º**

E ينطبق [ ] وينتج أن :-

مساحة سطح] أ س م = مساحة سطح] م د ص

بإضافة مساحة سطح] م د س للطرفين

E مساحة سطح] م د أ = مساحة سطح الشكل س م ص د

ولكن مساحة سطح] أ م د = $\frac{١}{٤}$ مساحة المربع = ٢٥ سم^{٢}

E مساحة سطح الشكل س م ص د = ٢٥سم^{٢}

السؤال (٤٤)

ما نوع المثلث الذي تحقق قياسات زواياه العلاقة :-

جتا أ + جتا ب = جا جـ **(اثبت ذلك)**

(المصدر – الأستاذ / جابر فتحي – ثانوية الأمير مشعل)

الحـــل

D ∠ أ + ∠ ب + ∠ جـ = ١٨٠°

E $\frac{\angle \text{أ} + \angle \text{ب}}{٢}$ = ٩٠° - $\frac{\angle \text{جـ}}{٢}$

E جتا $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}$ = جا $\frac{\text{جـ}}{٢}$

D ٢ جتا $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}$ جتا $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{٢}$ = ٢ جا $\frac{\text{جـ}}{٢}$ جتا $\frac{\text{جـ}}{٢}$

E ٢ جا $\frac{\text{جـ}}{٢}$ جتا $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{٢}$ = ٢ جا $\frac{\text{جـ}}{٢}$ جتا $\frac{\text{جـ}}{٢}$

٢ جا $\frac{\text{جـ}}{٢}$ (جتا $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{٢}$ - جتا $\frac{\text{جـ}}{٢}$) = صفر

أي أن : جا $\frac{\text{جـ}}{٢}$ = صفر s ∠ جـ = صفر أو ط (مرفوض)

أو (جتا $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{٢}$ - جتا $\frac{\text{جـ}}{٢}$) = صفر

ومنها :

جتا $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{٢}$ = جتا $\frac{\text{جـ}}{٢}$ s $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{٢}$ = ± $\frac{\text{جـ}}{٢}$

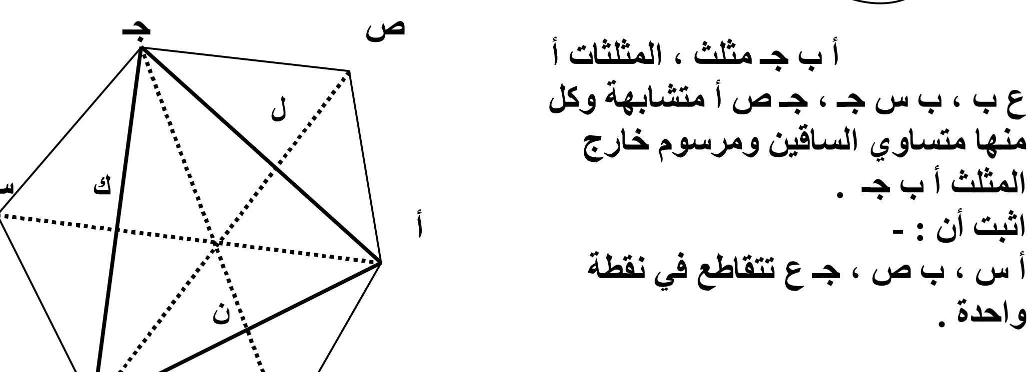
أي أن :

∠ أ - ∠ ب = ∠ جـ

E ∠ أ = ∠ ب + ∠ جـ s] قائم في ∠ أ

أو ∠ أ - ∠ ب = - ∠ جـ s ∠ ب = ∠ أ + ∠ جـ s] قائم في ∠ ب

السؤال ٤٥



أ ب جـ مثلث ، المثلثات أ ع ب ، ب س جـ ، جـ ص أ متشابهة وكل منها متساوي الساقين ومرسوم خارج المثلث أ ب جـ .

اثبت أن : -

أ س ، ب ص ، جـ ع تتقاطع في نقطة واحدة .

(المصدر – مجلة الرياضيات – ج ٠ م ٠ ع – العدد الثاني ديسمبر ١٩٨٢ م)

الحـــــل

D]] ص أ جـ ، ع أ ب متشابهان

قياس ∠ ص أ جـ = قياس ∠ ع أ ب

، $\frac{\text{ص أ}}{\text{ع أ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$

E قياس ∠ ص أ ب = قياس ∠ ع أ جـ ، ص أ × أ ب = ع أ × أ جـ

E] أ ص ب يكافيء] أ ع جـ ---------------------(١)

وبالمثل] ب ع جـ يكافيء] ب س أ ---------------------(٢)

،] جـ س أ يكافيء] جـ ص ب ---------------------(٣)

E $\frac{\text{أ ن}}{\text{ن ب}} = \frac{\text{مساحة] ع أ ن}}{\text{مساحة] ع ب ن}} = \frac{\text{مساحة] جـ أ ن}}{\text{مساحة] جـ ب ن}}$

E $\frac{\text{أ ن}}{\text{ن ب}} = \frac{\text{مساحة] ع أ ن + مساحة] جـ أ ن}}{\text{مساحة] ع ب ن + مساحة] جـ ب}} = \frac{\text{مساحة] أ ع جـ}}{\text{مساحة] ب ع جـ}}$

بالمثل

$\frac{\text{ب ك}}{\text{ن ب}} = \frac{\text{مساحة] ب س أ}}{\text{مساحة] جـ س أ}}$

$\frac{\text{جـ أ}}{\text{ل أ}} = \frac{\text{مساحة] جـ ص ب}}{\text{مساحة] أ ص ب}}$

E $\frac{\text{أ ن}}{\text{ن ب}} \times \frac{\text{ب ك}}{\text{ن ب}} \times \frac{\text{جـ أ}}{\text{ل أ}}$

= $\frac{\text{مساحة] أ ع جـ}}{\text{مساحة] ب ع جـ}} \times \frac{\text{مساحة] ب س أ}}{\text{مساحة] جـ س أ}} \times \frac{\text{مساحة] جـ ص ب}}{\text{مساحة] أ ص ب}}$ --------(٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤)

$\frac{\text{أ ن}}{\text{ن ب}} \times \frac{\text{ب ك}}{\text{ن ب}} \times \frac{\text{جـ أ}}{\text{ل أ}}$ = ١

E **وحسب عكس نظرية شيفا * المستقيمات أ س ، ب ص ، جـ ع تتقاطع في نقطة واحدة .**

نظرية شيفا *

إذا رسمت من رؤوس أي مثلث إلى أضلاعه المقابلة ثلاثة أشعة متقاطعة في نقطة واحدة بحيث تقسم كل ضلع من أضلاع المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزءين فإن حاصل ضرب أطوال ثلاثة أجزاء غير متتالية ومأخوذة في ترتيب دوري واحد يساوي حاصل ضرب أطوال الأجزاء الثلاثة الأخرى .

كما ينص عكس نظرية شيفا على أنه :-

إذا قسمت ثلاثة نقط أضلاع مثلث من الداخل أو ضلعين من الخارج والضلع الثالث من الداخل بحيث كان حاصل ضرب أطوال ثلاثة أجزاء غير متتالية ومأخوذة في اتجاه دوري واحد مساوياً لحاصل ضرب أطوال الأجزاء الثلاثة الأخرى كانت الأشعة المرسومة من رؤوس المثلث إلى نقط التقسيم تتقاطع في نقطة واحدة .

السؤال (٤٦)

اوجد العدد س في متتالية العداد ١ ، ٢ ، ٦ ، ٢٤ ، س ، ٧٢٠ ، ....

(المصدر – الأولمبياد الوطني الأردني للرياضيات ٢٠٠١ - المرحلة الأولى)

الحـــــل

١ × (٢) = ٢ ، ٢ × (٣) = ٦ ، ٦ × (٤) = ٢٤

E **العدد س** = ٢٤ × (٥) = ١٢٠

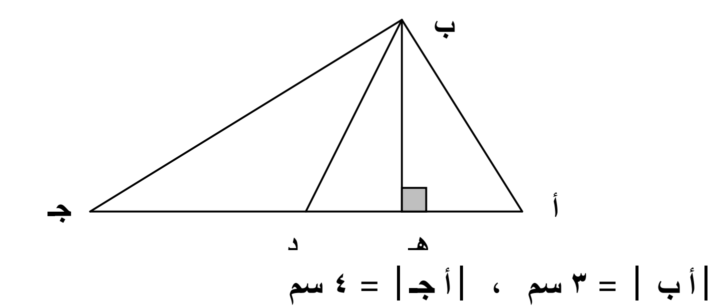
السؤال ٤٧

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه أ ب = ٣ سم ، أ جـ = ٥ سم . د منتصف أجـ ، ب هـ عمود من ب على أ جـ . اثبت أن :-

جتا هـ ب د × قا ب جـ أ × قا ب أ جـ = ٢

(المصدر – الأولمبياد الوطني الأردني للرياضيات ٢٠٠١ - المرحلة الثانية)

الحـــــل



|أ ب | = ٣ سم ، |أ جـ| = ٤ سم

من نظرية فيثاغورث |ب جـ | =٥ سم

|ب د| = ٢,٥ سم (متوسط خارج من رأس القائمة)

|ب هـ | = $\frac{٤\times٣}{٥}$ سم = ٢,٤ سم

جتا ∠ هـ ب د = $\frac{٢,٤}{٢,٥}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

قا ∠ ب جـ أ = $\frac{٥}{٤}$

قا ∠ ب أ جـ = $\frac{٥}{٣}$

E جتا ∠ هـ ب د + قا ∠ ب جـ أ + قا ∠ ب أ جـ = $\frac{٢٤}{٢٥}\times\frac{٥}{٤}\times\frac{٥}{٣}$ = ٢

السؤال (٤٨)

إذا كانت $س^٢ ص ع = ١٢$ ، $س ص^٢ ع = ٦$ ، $س ص ع^٢ = ١٨$

فاوجد س + ص + ع

(المصدر – مسائل تدريبية للأستاذ كميل حليم موجه الرياضيات العام بمحافظة أسيوط – ج ٠ م ٠ ع)

الحـــــل

D $س^٢ ص ع = ١٢$ ----------------(١)

، $س ص^٢ ع = ٦$ ----------------(٢)

، $س ص ع^٢ = ١٨$ ------------------(٣)

بضرب (١) × (٢) × (٣)

$س^٤ ص^٤ ع^٤ = ١٢ × ٦ × ١٨$

$(س ص ع)^٤ = ٦^٤$ ---------------(٤)

$س ص ع = (\pm ٦)$

بجمع (١) ، (٢) ، (٣)

$س^٢ ص ع + س ص^٢ ع + س ص ع^٢ = ١٢ + ٦ + ١٨$

$س ص ع (س + ص + ع) = ٣٦$ -----------------(٥)

من (٤) ،(٥)

$س + ص + ع = \pm ٦$

السؤال (٤٩)

إذا كانت س ، ص ، ع ثلاثة أعداد حقيقية موجبة ، وكان س ص ع = ١

اثبت أن :-

$$\frac{١}{س^{٣}(ص+ع)} + \frac{١}{ص^{٣}(س+ع)} + \frac{١}{ع^{٣}(س+ص)} \geq \frac{٣}{٢}$$

الحـــــل

نفرض أن :-

$$د = \frac{١}{س} \quad ، \quad ب = \frac{١}{ص} \quad ، \quad جـ = \frac{١}{ع}$$

، ل = د + ب + جـ

وكذلك نفرض أن:-

$$ك = \frac{١}{س^{٣}(ص+ع)} + \frac{١}{ص^{٣}(س+ع)} + \frac{١}{ع^{٣}(س+ص)}$$

بالتعويض في ك :-

$$\frac{١}{س^{٣}(ص+ع)} = \frac{د^{٣}\,ب\,جـ}{ب+جـ} = \frac{د^{٢}\,(د\,ب\,جـ)}{ب+جـ} = \frac{د^{٢}}{ب+جـ}$$

ولكن ل = د + ب + جـ ومنها ب + جـ = ل - د

$$\frac{د^{٢}}{ب+جـ} = \frac{د^{٢}}{ل-د} = \frac{ل^{٢} - (ل^{٢} - د^{٢})}{ل-د} = \frac{ل^{٢}}{ل-د} - \frac{(ل^{٢} - د^{٢})}{ل-د}$$

$$= \frac{ل^{٢}}{ل-د} - \frac{(ل-د)(ل+د)}{ل-د} = \frac{ل^{٢}}{ل-د} - ل - د$$

وبالمثل :-

$$\frac{١}{ص^{٣}(س+ع)} = \frac{ل^{٢}}{ل-ب} - ل - ب$$

$$\text{،}\quad \frac{1}{\text{ع}^{3}(\text{س}+\text{ص})} = \frac{\text{ل}^{2}}{\text{ل}-\text{جـ}} - \text{ل} - \text{جـ}$$

أي أن :-

$$\text{ك} = \text{ل}^{2}\left(\frac{1}{\text{ل}-\text{د}} + \frac{1}{\text{ل}-\text{ب}} + \frac{1}{\text{ل}-\text{جـ}}\right) - 3\,\text{ل} - (\text{د}+\text{ب}+\text{جـ})$$

$$\text{ك} = \text{ل}^{2}\left(\frac{1}{\text{ل}-\text{د}} + \frac{1}{\text{ل}-\text{ب}} + \frac{1}{\text{ل}-\text{جـ}}\right) - 4\text{ل}$$

الآن سوف نعمل على الجزء $\left(\frac{1}{\text{ل}-\text{د}} + \frac{1}{\text{ل}-\text{ب}} + \frac{1}{\text{ل}-\text{جـ}}\right)$ **وذلك لإثبات علاقة التباين**

$$E\quad \Big(\big((\text{ل}-\text{د})+(\text{ل}-\text{ب})\big) + (\text{ل}-\text{جـ})\Big)\left(\left(\frac{1}{\text{ل}-\text{د}} + \frac{1}{\text{ل}-\text{ب}}\right) + \frac{1}{\text{ل}-\text{جـ}}\right)$$

$$= \big((\text{ل}-\text{د})+(\text{ل}-\text{ب})\big)\left(\frac{1}{\text{ل}-\text{د}} + \frac{1}{\text{ل}-\text{ب}}\right) + \frac{1}{\text{ل}-\text{جـ}}\big((\text{ل}-\text{د})+(\text{ل}-\text{ب})\big)$$

$$+ (\text{ل}-\text{جـ})\left(\frac{1}{\text{ل}-\text{د}} + \frac{1}{\text{ل}-\text{ب}}\right) + (\text{ل}-\text{جـ}) \times \frac{1}{\text{ل}-\text{جـ}}$$

$$= \big((\text{ل}-\text{د})+(\text{ل}-\text{ب})\big)\left(\frac{(\text{ل}-\text{د})+(\text{ل}-\text{ب})}{(\text{ل}-\text{د})(\text{ل}-\text{ب})}\right) + \frac{\text{ل}-\text{د}}{\text{ل}-\text{جـ}} + \frac{\text{ل}-\text{ب}}{\text{ل}-\text{جـ}} +$$

$$+ \frac{\text{ل}-\text{جـ}}{\text{ل}-\text{د}} + \frac{\text{ل}-\text{جـ}}{\text{ل}-\text{ب}} + 1$$

$$= \frac{[(\text{ل}-\text{د})+(\text{ل}-\text{ب})]^{2}}{(\text{ل}-\text{د})(\text{ل}-\text{ب})} + \left(\frac{\text{ل}-\text{د}}{\text{ل}-\text{جـ}} + \frac{\text{ل}-\text{جـ}}{\text{ل}-\text{د}}\right) + \left(\frac{\text{ل}-\text{ب}}{\text{ل}-\text{جـ}} + \frac{\text{ل}-\text{جـ}}{\text{ل}-\text{ب}}\right) + 1$$

$$= \frac{[(\text{ل}-\text{د})+(\text{ل}-\text{ب})]^{2}}{(\text{ل}-\text{د})(\text{ل}-\text{ب})} + \left(\frac{(\text{ل}-\text{جـ})^{2}+(\text{ل}-\text{د})^{2}}{(\text{ل}-\text{جـ})(\text{ل}-\text{د})}\right) + \left(\frac{(\text{ل}-\text{جـ})^{2}+(\text{ل}-\text{ب})^{2}}{(\text{ل}-\text{جـ})(\text{ل}-\text{ب})}\right)$$

$$+ 1$$

ولكن لأي عددين موجبين هـ ، و على سبيل المثال فإن :-

الوسط الحسابي ≤ الوسط الهندسي

أي أن

$$\frac{هـ + و}{٢} \geq \sqrt{هـ\ و}$$

ومنها

$$\frac{هـ + و}{\sqrt{هـ\ و}} \geq ٢ \quad \text{بالتربيع} \quad \frac{(هـ + و)^٢}{هـ\ و} \geq ٤$$

ومنها

$$\frac{[\,(ل - د) + (ل - ب)\,]^٢}{(ل - د)\,(ل - ب)} \geq ٤$$

$$\text{،} \quad \left(\frac{(ل - جـ)^٢ + (ل - د)^٢}{(ل - جـ)\,(ل - د)}\right)$$

تكافيء

$$\left(\frac{(ل - جـ)^٢ + (ل - د)^٢}{\sqrt{(ل - جـ)^٢\,(ل - د)^٢}}\right) \geq \sqrt{٤} = ٢$$

بالمثل

$$\left(\frac{(ل - جـ) + (ل - ب)}{(ل - جـ)\,(ل - ب)}\right) \geq ٢$$

أي أن

$$\left((ل - د) + (ل - ب)\,(ل - جـ)\right)\left(\frac{١}{ل - د} + \frac{١}{ل - ب} + \frac{١}{ل - جـ}\right) \geq ٤ + ٢ + ٢ + ١$$

ومنها

$$\left(\frac{١}{ل - د} + \frac{١}{ل - ب} + \frac{١}{ل - جـ}\right) \geq \frac{٩}{(ل - د) + (ل - ب)\,(ل - جـ)}$$

ومنها

$$ك \geq ل^٢ \times \frac{٩}{(ل - د) + (ل - ب)\,(ل - جـ)} - ٤\,ل$$

$$ك \geq ل^٢ \times \frac{٩}{٢ل} - ٤\,ل$$

$$ك \le \frac{٩ل}{٢} - ٤ل$$

$$ك \le \frac{ل}{٢}$$

$$ك \le \frac{د + ب + جـ}{٢}$$

ولكن وحسب تعريف الوسط الهندسي لأكثر من كميتين

$$\frac{د + ب + جـ}{٣} \le \sqrt[٣]{د\ ب\ جـ}$$

ومنها

$$د + ب + جـ \le ٣ \sqrt[٣]{د\ ب\ جـ}$$

بالقسمة على ٢

$$\frac{د + ب + جـ}{٢} \le \frac{٣}{٢} \sqrt[٣]{د\ ب\ جـ}$$

ومنها

$$ك \le \frac{٣}{٢} \sqrt[٣]{١}$$

أي أن :-

$$\frac{١}{س^{٣}(ص + ع)} + \frac{١}{ص^{٣}(س + ع)} + \frac{١}{ع^{٣}(س + ص)} \le \frac{٣}{٢}$$

السؤال 

حل المعادلة :- $\left(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}\right) - ١٨\left(س + \frac{١}{س}\right) - ١٧ = صفر$

(المصدر – طرق تدريس الرياضيات – المغيرة ١٩٨٩م)

الحـــــل

نفرض أن : $ص = \frac{١}{س}$

E $(س^{٢} + ص^{٢}) - ١٨(س + ص) – ١٧ = صفر$

$(س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص – ٢ س ص) – ١٨ (س + ص) – ١٧ = صفر$

$(س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص) – ١٨ (س + ص) – ١٧ – ٢ س ص= صفر$

$(س + ص)^{٢} - – ١٨ (س + ص) – ١٧ – ٢ س ص= صفر$

E $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٢} - ١٨\left(س + \frac{١}{س}\right) - ١٧ – (٢ × س × \frac{١}{س}) = صفر$

$\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٢} - ١٨\left(س + \frac{١}{س}\right) - ١٩ = صفر$

$\left(س + \frac{١}{س} - ١٩\right)\left(س + \frac{١}{س} + ١\right) = صفر$

E $س + \frac{١}{س} - ١٩ = صفر$ **بالضرب في س**

E $س^{٢} – ١٩ س+ ١ = صفر$ **باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية في مجهول واحد**

E $س = \frac{١٩ \pm \sqrt{٣٥٧}}{٢}$

أو $س + \frac{١}{س} + ١ = صفر$ **بالضرب في س**

E $س^{٢} + س+ ١ = صفر$ **باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية في مجهول واحد**

E $س = \frac{-١ \pm \sqrt{٣}\,ت}{٢}$

مجموعة الحل = $\left\{ \frac{١٩ \pm \sqrt{٣٥٧}}{٢} \text{ ، } \frac{-١ \pm \sqrt{٣}\,ت}{٢} \right\}$

السؤال (٥١)

برهن أنه في أي مثلث س ص ع تتحقق العلاقة :-

$$\text{جا}\left(\frac{\text{س - ص}}{٢}\right) = \left(\frac{\text{سَ - صَ}}{\text{عَ}}\right)\text{جتا}\,\frac{\text{ع}}{٢}$$

(المصدر – الأستاذ / جابر فتحي – ثانوية الأمير مشعل بن سعود)

الحــــــل

$$D \quad \frac{\text{سَ}}{\text{جا س}} = \frac{\text{صَ}}{\text{جا ص}} = \frac{\text{عَ}}{\text{جا ع}}$$

من خواص التناسب

$$\frac{\text{سَ - صَ}}{\text{جا س – جا ص}} = \frac{\text{عَ}}{\text{جا ع}} = \text{إحدى النسب}$$

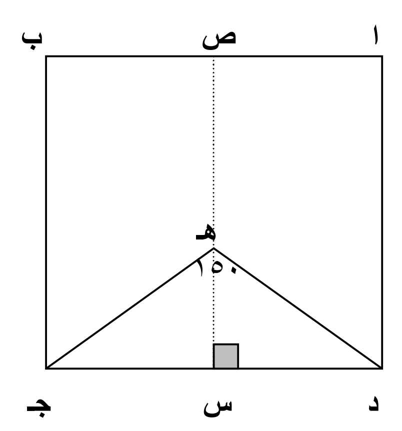
$$(\text{سَ - صَ}) \times \text{جا ع} = \text{عَ} \times (\text{جا س – جا ص})$$

$$\frac{\text{سَ - صَ}}{\text{عَ}} = \left[٢\ \text{حا}\left(\frac{\text{س - ص}}{٢}\right)\text{حتا}\left(\frac{\text{س + ص}}{٢}\right)\right] \div \left[٢\ \text{حا}\,\frac{\text{ع}}{٢}\ \text{حتا}\,\frac{\text{ع}}{٢}\right]$$

$$\frac{\text{سَ - صَ}}{\text{عَ}} = \frac{\cancel{٢}\ \text{حا}\left(\frac{\text{س - ص}}{٢}\right)\ \cancel{\text{حا}\,\frac{\text{ع}}{٢}}}{\cancel{٢}\ \cancel{\text{حا}\,\frac{\text{ع}}{٢}}\ \text{حتا}\,\frac{\text{ع}}{٢}}$$

$$\text{حا}\left(\frac{\text{س - ص}}{٢}\right) = \left(\frac{\text{سَ - صَ}}{\text{عَ}}\right)\text{حتا}\,\frac{\text{ع}}{٢}$$

السؤال (٥٢)



انشيء المثلث د هـ جـ المتساوي الساقين والذي زاويته المنفرجة تساوي ١٥٠ °، فإذا علمت أن الشكل أ ب جـ د مربع يحوي في داخله النقطة هـ ، فاثبت أن :-

] ا هـ ب مثلث متساوي الأضلاع .

(المصدر – طرق تدريس الرياضيات – المغيرة ١٩٨٩م)

الحـــــل

نرسم س ص // أ د ويمر بنقطة هـ

نفرض أنطول ضلع المربع = ل

D | د هـ | = | جـ هـ | ، س ص ⊥ د جـ

E المستقيم س ص محر تماثل للمربع أ ب جـ د

في] د هـ س القائم في ∠ س

قياس ∠ هـ د س = ١٨٠ – (٩٠ + $\frac{١٥٠}{٢}$) = ١٥ °

E | س هـ | = | س د | ظا ١٥ °

E | س هـ | = $\frac{١}{٢}$ ل × ظا (٤٥° - ٣٠°) = $\frac{١}{٢}$ ل × $\frac{\text{ظا٤٥ – ظا٣٠}}{\text{١ + ظا٤٥ظا٣٠}}$

E | س هـ | = $\frac{١}{٢}$ ل × (٢ - $\sqrt{٣}$)

E | ص هـ | = ل - [$\frac{١}{٢}$ ل × (٢ - $\sqrt{٣}$)]

E | ص هـ | = $\sqrt{\frac{٣}{٢}}$ ل

في] ب ص هـ القائم في ∠ ص ، باستخدام نظرية فيثاغورث

| ص هـ |٢ = ($\frac{١}{٢}$ ل)٢ + ($\sqrt{\frac{٣}{٢}}$ ل)٢ = $\frac{١}{٤}$ ل٢ + $\frac{٣}{٤}$ ل٢ = ل٢

| ص هـ | = | أ هـ | = ل = طول ضلع المربع s] ا هـ ب مثلث متساوي الأضلاع .

السؤال ٥٣

المسافة بين مدينتين س، ص هي ٢٠ كيلو متر ، والمسافة بين المدينة ص ومدينة أخري ك هي ١٧ كيلو متر . سافر شخص من س إلى ص بالسيارة ومن ص إلى ك بالقطار وبذلك استغرق بالسفر من س إلى ك ساعة واحدة و $٢\frac{٢}{٣}$ دقيقة ، وفي العودة سافر من ك إلى ص بالسيارة ومن ص إلى س بالقطار وبذلك استغرق بالسفر من ك إلى س ساعة و $\frac{٢}{٣}$ دقيقة .
ما سرعة كل من السيارة والقطار بالكيلو متر / ساعة .

(المصدر – الأولمبياد الوطني الأردني للرياضيات ٢٠٠١ - المرحلة الثانية)

الحـــــل

نفرض أن سرعة السيارة $ع_١$ ، سرعة القطار $ع_٢$

E $\frac{٢٠}{ع_١} + \frac{١٧}{ع_٢} = ٦٢\frac{٢}{٣}$ ------------(١)

، $\frac{١٧}{ع_١} + \frac{٢٠}{ع_٢} = ٦٠\frac{٢}{٣}$ -----------(٢)

بضرب المعادلة (١) × ١٧ ، والمعادلة الثانية (٢) × ٢٠ والطرح

$ع_٢ = \frac{٣}{٤}$ كم/ دقيقة = ٤٥ كم / ساعة

بالتعويض عن قيمة $ع_٢$ في المعادلة (١)

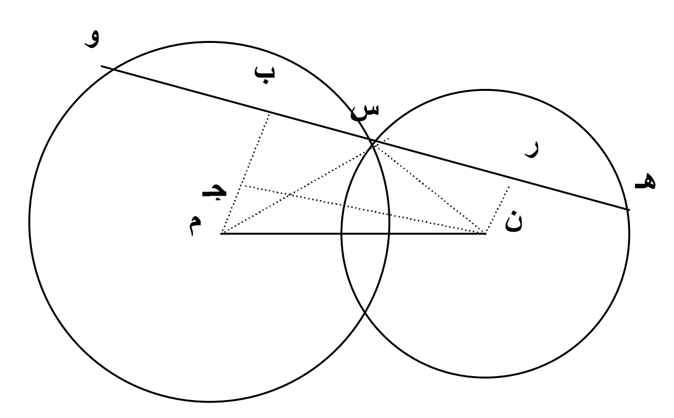
$ع_١ = \frac{١}{٢}$ كم/ دقيقة = ٣٠ كم / ساعة

السؤال (٥٤)

(م ، ٨) ، (ن ، ٦) دائرتـان متقاطعتـان س ، ص . رسـم المستقيم هــ و يمـر بنقطة س ويقطع الدائرة الكبرى في نقطة هـ ويقطع الصغرى في نقطة و ، طول م ن = ١٢ بحيث |س هـ| = |س و| .
احسب | هـ س |٢

(المصدر – الأولمبياد الوطني الأمريكي للرياضيات- ١٩٨٣)

الحـــــل



نرسم ن ر ⊥ هـ س ، م ب ⊥ س و ، ن جـ // هـ و ، نصل ن س ، م س

D| س هـ | = | س و |

E | هـ ر | = | ر س | = | س ب | = | ب و |

نفرض أن : | هـ ر | = | ر س | = | س ب | = | ب و | = ل

E | ن جـ| = ٢ل

ونفرض كذلك أن : | ن ر | = ك ، | ب م | = ع

في] ر ن س القائم في ∠ ر ، باستخدام نظرية فيثاغورث

ع٢ = ٣٦ – ل٢ --------------------(١)

في] ب م س القائم في ∠ ب

ك٢ = ٦٤ – ل٢ --------------------(٢)

في] ن م جـ القائم في ∠ جـ

$١٤٤ = (٢ل)^٢ + (| م ب | - | ب جـ |)^٢$

D الشكل ر ن جـ ب

E $١٤٤ = (٢ل)^٢ + (| م ب | - | ر ن |)^٢$

$١٤٤ = (٢ل)^٢ + (ك - ع)^٢$ ------------------(٣)

$١٤٤ = ٤ل^٢ + ك^٢ + ع^٢ - ٢ ك ع$

$١٤٤ = ٤ل^٢ + (٦٤ - ل^٢) + (٣٦ - ل^٢) - ٢ \sqrt{(٦٤ - ل^٢)(٣٦ - ل^٢)}$

$١٤٤ = ٢ل^٢ + ١٠٠ - ٢ \sqrt{(٦٤ - ل^٢)(٣٦ - ل^٢)}$ بالقسمة على ٢

$٧٢ = ل^٢ + ٥٠ - \sqrt{(٦٤ - ل^٢)(٣٦ - ل^٢)}$

$ل^٢ - ٢٢ = \sqrt{(٦٤ - ل^٢)(٣٦ - ل^٢)}$ بالتربيع

$ل^٤ - ٤٤ ل^٢ + ٤٨٤ = (٦٤ - ل^٢)(٣٦ - ل^٢)$

$ل^٤ - ٤٤ ل^٢ + ٤٨٤ = ٢٣٠٤ - ١٠٠ل^٢ + ل^٤$

$٥٦ ل^٢ = ٢٣٠٤ - ٤٨٤$

$٥٦ ل^٢ = ١٨٢٠$

$ل^٢ = \frac{١٨٢٠}{٥٦}$ بالضرب × ٤

$(٢ل)^٢ = ١٣٠$

$| ن جـ | = | هـ س | = ٢ل$

$| هـ س |^٢ = ١٣٠$

السؤال (٥٥)

أ ب جـ د متوازي أضلاع

ص ∈ $\overleftarrow{\text{دجـ}}$ بحيث |س ص| = ٧٣٥ وحدة وكذلك

|هـ س| =١١٢ وحدة .

احسب |أ هـ|

(المصدر – الأولمبياد الوطني الأمريكي للرياضيات - ١٩٩٨)

الحـــــل

من تشابه [ ] س أ ب ، س ص جـ

E (س ص / أ س) = (س جـ / س ب) = (ص جـ / أ ب)

E (٧٣٥ / أ هـ + ١١٢) = (ص جـ / أ ب) -------------------(١)

من تشابه [ ] أ هـ ب ، ص هـ د

E (ص هـ / أ هـ) = (هـ د / هـ ب) = (ص د / أ ب)

(١١٢ + ٧٣٥ / أ هـ) = (ص د / أ ب)

(٨٤٧ / أ هـ) = (|د جـ| + |جـ ص| / أ ب)

ولكن |د جـ| = |أ ب|

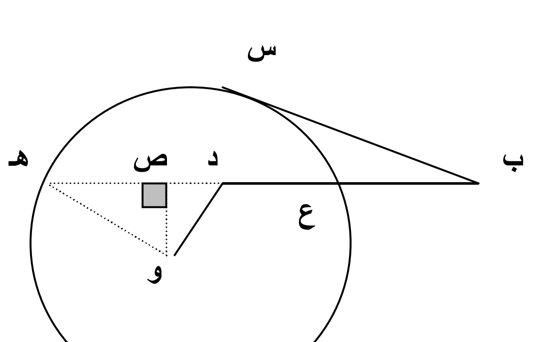
E (ص هـ / ٨٤٧) = ١ + (جـ ص / أ ب) -------------------(٢)

من (١) ، (٢)

E (٨٤٧ / أ هـ) = ١ + (٧٣٥ / أ هـ + ١١٢)

E |أ هـ| = ٣٠٨ وحدة

السؤال (٥٦)



على الشكل : ب س يمس الدائرة التي ، النقطة د تقع داخل الدائرة ، ب د يقطع الدائرة في نقطة ع .
فإذا كان : |ب ع| = |ع د| = ٣ سم ، |و د| = ٢ سم ، |ب س| = ٦ سم
احسب طول نصف قطر الدائرة .

(المصدر – مجلة الرياضيات * ج . م . ع * العدد الأول – مارس ١٩٨٢)

الحـــــل

نمد الشعاع ب ع ليقطع الدائرة في هـ ، نسقط العمود وص علي الشعاع ب س ، ونصل و س

من تشابه]] س ب ع ، هـ ب س

$$\frac{\text{س ب}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{ب ع}}{\text{ب س}}$$

|س ب|٢ = |هـ ب| × |ب ع|

٣٦ = ٣ × |ب ع|

|ب هـ| = ١٢ سم

D |ع هـ| = |ب هـ| - |ب ع| = ١٢ – ٣ = ٩ سم

D و ص ⊥ الوتر ع هـ

E |ع ص| = ٤,٥ سم

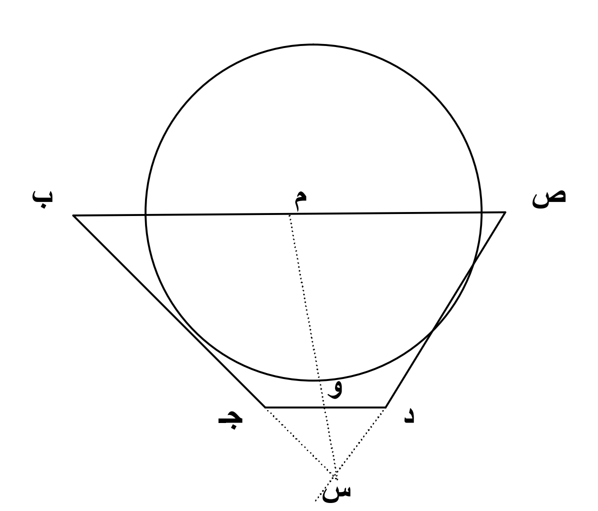
E |د ص| = ٤,٥ – ٣ = ١,٥ سم

E |و س|٢ = |و ص|٢ + |س ص|٢

E |و س|٢ = (|و د|٢ - |د ص|٢) + |س ص|٢ = ٤ - $\frac{٩}{٤}$ + $\frac{٨١}{٤}$ = ٢٢

E نق = √٢٢ سم .

السؤال ٥٧



على الشكل :-

ص ب جـ د شبه منحرف فيه ، ص ب // د جـ
، |ص ب| = ٩٢ وحدة ، |ص د| = ٥٠ وحدة
، |جـ د| = ١٩ وحدة ، |جـ ب| = ٧٠ وحدة
المستقيم ص ب يمر بمركز الدائرة م ، ص د ، ب جـ مماسان.
اوجد |ب م|

(المصدر – الأولمبياد الوطني الأمريكي للرياضيات - ١٩٩٨)

الحـــــل

نمد ص د ، ب جـ يتقاطعان في نقطة س ، ونصل م س ليقطع د جـ في نقطة و

في] ص س ب

D م س ينصف ∠ ص س ب

E $\frac{\text{ص م}}{\text{م ب}} = \frac{\text{ب س}}{\text{س ص}}$ **(نظرية منصف الزاوية) * --------------------(١)**

من تشابه]] س د جـ ، س ص ب

$\frac{\text{س د}}{\text{س ص}} = \frac{\text{س جـ}}{\text{س ب}} = \frac{\text{د جـ}}{\text{ص ب}}$

$\frac{\text{س د}}{\text{س د + ٥٠}} = \frac{\text{س جـ}}{\text{س جـ + ٧٠}} = \frac{\text{١٩}}{\text{٩٢}}$

٩٢ × س جـ = ١٩ × س جـ + ٧٠ × ١٩

٧٣ × س جـ = ١٣٣٠

|س جـ| = ١٨ ,٢٢ وحدة

، ٩٢ × س د = ١٩ × س جـ + ١٩ × ٥٠

|س د| = ١٣ ,٠١ وحدة

E |ص س| = ٥٠ + ١٣ ,٠١ = ٦٣ ,٠١ وحدة
، |س ب| = ٧٠ + ١٨ ,٢٢ = ٧٨ ,٢٢ وحدة } **(٢)**

بالتعويض من (٢) في (١)

E ٧٨ ,٢٢ / ٦٣ ,٠١ = ص م / م ب

(٧٨ ,٢٢ + ٦٣ ,٠١) / ٦٣ ,٠١ = (ص م + ب م) / ب م

١٤١ ,٢٣ / ٦٣ ,٠١ = ٩٢ / ب م

E |ب م| = ٤٩ ,٤١ وحدة

(نظرية منصف الزاوية) *

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس قسَم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزأين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث .

السؤال



أوجد الحل الموجب للمعادلة :-

$$\frac{١}{\text{س}^{٢} - ١٠\,\text{س} - ٢٩} + \frac{١}{\text{س}^{٢} - ١٠\,\text{س} - ٤٥} = \frac{٢}{\text{س}^{٢} - ١٠\,\text{س} - ٦٩}$$

(المصدر – الأولمبياد الوطني الأمريكي للرياضيات - ٢٠٠٤)

الحـــــل

نفرض أن :-

$\text{س}^{٢} - ١٠\,\text{س} - ٢٩ = \text{ص}$

E $\frac{١}{\text{ص}} + \frac{١}{\text{ص} - ١٦} = \frac{٢}{\text{ص} - ٤٠}$

$$\frac{\text{ص} - ١٦ + \text{ص}}{\text{ص}\,(\text{ص} - ١٦)} = \frac{٢}{\text{ص} - ٤٠}$$

$$\frac{٢\text{ص} - ١٦}{\text{ص}\,(\text{ص} - ١٦)} = \frac{٢}{\text{ص} - ٤٠}$$

$٢\,\text{ص}^{٢} - ٨٠\,\text{ص} - ١٦\,\text{ص} + ٦٤٠ = ٢\,\text{ص}^{٢} - ٣٢\,\text{ص}$

E $\text{ص} = ١٠$

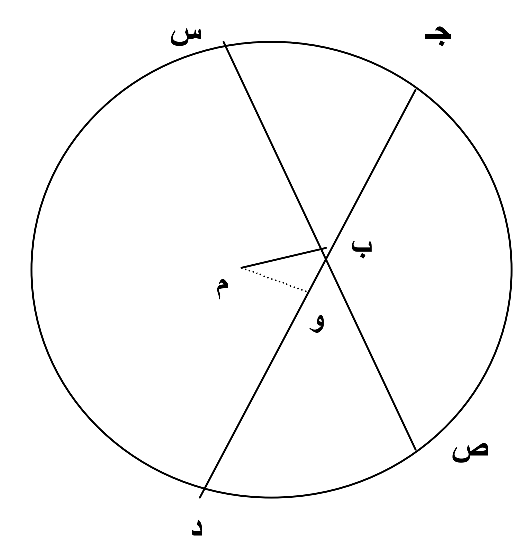
E $\text{س}^{٢} - ١٠\,\text{س} - ٢٩ = ١٠$

E $\text{س}^{٢} - ١٠\,\text{س} - ٣٩ = \text{صفر}$

E $(\text{س} - ١٣)\,(\text{س} + ٣) = \text{صفر}$

E $\text{س} = ١٣$

السؤال 



على الشكل :-
في الدائرة (م ، ٤٢) ، س ص ، جـ د وتران ، |س ص| = |جـ د| = ٧٨ وحدة ، |م و| = ١٨ وحدة.
اوجد مساحة الجزء المحصور بين القطعتين المستقيمتين ب ص ، ب د والقوس ص د

(المصدر – الأولمبياد الوطني الأمريكي للرياضيات - ١٩٩٨)

الحـــــل

نرسم م و ⊥ د جـ

E و منتصف جـ د

في] م و د القائم في ∠ و

|م و|^{٢} = |م د|^{٢} - |د و|^{٢}

= (٤٢)^{٢} - (٣٩)^{٢}

|م و| = ٩ $\sqrt{٣}$ وحدة.

في] م و ب القائم في ∠ و

|ب و|^{٢} = |م ب|^{٢} - |م و|^{٢}

= (١٨)^{٢} – (٩ $\sqrt{٣}$)^{٢} = ٨١

|ب و| = ٩ وحدات

E |ب د| = ٩ + ٣٩ = ٤٨ وحدة

E |ب ص| = |ب جـ| = ٧٨ – ٤٨ = ٣٠ وحدة

في] م و ب

D |م و| = ٩ $\sqrt{٣}$ ، |ب و| = ٩

E ∠ ص ب د = ٦٠°

E مساحة سطح] د ب ص = $\frac{١}{٢}$ × |ب ص| × |ب د| × جا ٦٠°

= ٣٦٠ √٣ وحدة مربعة

والآن نحاول إيجاد المنطقة المحصورة بين الوتر ص د ، والقوس ص د

D ∠ د جـ ص = ∠ ب ص جـ

D، ∠ د ب ص = ٦٠° خارجة عن المثلث ب جـ ص

E ∠ د جـ ص = ٣٠° زاوية محيطية

E ∠ د م ص = ٦٠° زاوية مركزية تشترك معها في القوس

مساحة القطعة الدائرية المحصورة الوتر الأصغر ب د

= ١/٢ × (٤٢)^٢ × [هـ^ء - جا هـ]

حيث هـ رأس الزاوية المركزية التي تحصر قوس القطعة الدائرية

= ١/٢ × (٤٢)^٢ × [ط/٣ - جا ٦٠°]

= ٢٩٤ ط – ٤٤١ √٣ وحدة مربعة

مساحة الجزء المحصور بين القطعتين المستقيمتين ب ص ، ب د والقوس ص د

= مساحة سطح] د ب ص + مساحة القطعة الدائرية المحصورة الوتر الأصغر ب د

= ٣٦٠ √٣ + ٢٩٤ ط – ٤٤١ √٣

= ٢٩٤ ط – ٨١ √٣ وحدة مربعة .

السؤال



إذا كانت س ، ص ،ع أعدادا حقيقية أكبر من الواحد الصحيح وكان N عدد حقيقي موجب ، احسب $لو_{ع}$ N إذا كان :-

$لو_{س}$ N = ٢٤ ، $لو_{ص}$ N = ٤٠ ، $لو_{س ص ع}$ N = ١٢

(المصدر – الأولمبياد الوطني الأمريكي للرياضيات - ١٩٨٣)

الحــــل

D $لو_{س}$ N = ٢٤ ⇐ N = $س^{٢٤}$

D $لو_{ص}$ N = ٤٠ ⇐ N = $ص^{٤٠}$

D $لو_{س ص ع}$ N = ١٢ ⇐ N = $(س ص ع)^{١٢}$

E N = $س^{٢٤}$ = $ص^{١٢}$ = $س^{١٢}$ $ص^{١٢}$ $ع^{١٢}$

E $N^{١٠}$ = $س^{١٢٠}$ $ص^{١٢٠}$$ع^{١٢٠}$ ---------------(١)

E $N^{٥}$ = $(س^{٢٤})^{٥}$ = $س^{١٢٠}$ ، $N^{٣}$ = $(ص^{٤٠})^{٣}$ = $ص^{١٢٠}$ ---------------(٢)

بالتعويض في (١) من (٢)

E $N^{١٠}$ = $N^{٥}$ $N^{٣}$ $ع^{١٢٠}$ ⇐ $N^{٢}$ = $ع^{١٢٠}$ ⇐ N = $ع^{٦٠}$

E $لو_{ع}$ N = ٦٠



السؤال ٦١

أوجد مجموعة حل المعادلة :-

$$س^{\frac{١}{٤}} = ١٢ / (٧ - س)^{\frac{١}{٤}}$$

(المصدر – الأولمبياد الوطني الأمريكي للرياضيات - ١٩٨٦)

الحـــــل

$$(٧ - س^{\frac{١}{٤}}) \times س^{\frac{١}{٤}} = ١٢$$

$$٧ س^{\frac{١}{٤}} - س^{\frac{١}{٢}} - ١٢ = صفر$$

$$(س^{\frac{١}{٤}} - ٣)(س^{\frac{١}{٤}} - ٤) = صفر$$

$$س^{\frac{١}{٤}} = ٣ \quad \Leftarrow \quad س = ٨١$$

$$س^{\frac{١}{٤}} = ٤ \quad \Leftarrow \quad س = ٢٥٦$$

$$م . ح = \{ ٨١ ، ٢٥٦ \}$$

السؤال ٦٢

احسب $(٥٢ + ٦\sqrt{٤٣})^{\frac{٣}{٢}} + (٥٢ - ٦\sqrt{٤٣})^{\frac{٣}{٢}}$

(المصدر – الأولمبياد الوطني الأمريكي للرياضيات - ١٩٩٠)

الحـــــل

$$٥٢ + ٦\sqrt{٤٣} = (٣ + \sqrt{٤٣})^{٢}$$

$$E \quad (٣ + \sqrt{٤٣})^{٣} - (٣ - \sqrt{٤٣})^{٣} = ٤١٤ + ٧٠\sqrt{٤٣} - ٧٠\sqrt{٤٣} + ٤١٤$$

$$= ٨٢٨$$

السؤال  ٦٣

إذا كانت س ص + ص + س + ٧١ ، س^{٢} ص + س ص^{٢} = ٨٨٠
أوجد س^{٢} + ص^{٢} حيث س ، ص أعداد صحيحة موجبة ،

(المصدر – الأولمبياد الوطني الأمريكي للرياضيات - ١٩٩١)

الحـــــل

نفرض أن : س + ص = Q ، س ص = K

E **س ص + ص + س = Q + K = ٧١ ----------------(١)**

، س^{٢} ص + س ص^{٢} = س ص (س + ص) = K Q = ٨٨٠ ----------------(٢)

من (١) : Q = ٧١ - K بالتعويض في (٢)

K (٧١ - K) = ٨٨٠

E K^{٢} – ٧١ K + ٨٨٠ = **صفر**

E (K - ٥٥) (K - ١٦) = **صفر**

E K = **٥٥ أو ١٦ ومنها** Q = **١٦ أو ٥٥**

E **س^{٢} + ص^{٢} = (س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص) – ٢ س ص**

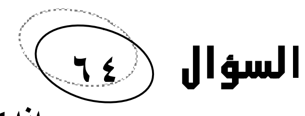
= (س + ص) ^{٢} – ٢ س ص

= Q^{٢} – ٢ K

= ٢٥٦ – ١١٠

= ١٤٦

السؤال



إذا كانت س ، ص ، ع أعداداً حقيقية موجبة بحيث :-

س ص ع = ١ ، س + $\frac{١}{ع}$ = ٥ ، ص + $\frac{١}{س}$ = ٢٩

أوجد ناتج : ع + $\frac{١}{ص}$

الحـــــل

من المعادلات المعطاة :-

$\frac{١}{ع}$ = ٥ - س ، ص = ٢٩ - $\frac{١}{س}$ ، س ص = $\frac{١}{ع}$

E س (٢٩ - $\frac{١}{س}$) = ٥ - س

E ٢٩ س – ١ = ٥ - س

E س = $\frac{١}{٥}$

E ص = ٢٤ ، ع = $\frac{٥}{٢٤}$

E ع + $\frac{١}{ص}$ = $\frac{٥}{٢٤}$ + $\frac{١}{٢٤}$ = $\frac{١}{٤}$

السؤال 

إذا كان ١ ، ω ، ω^2 هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

اثبت أن :-

$$\frac{\omega}{(2+5\omega+2\omega^2)^2}+\frac{\omega^2}{(2+2\omega+5\omega^2)^2}=-\frac{1}{9}$$

(المصدر – اختبار الثانوية العامة – ج . م .ع – ١٩٤٧)

الحـــــل

الطرف الأيمن :

$$\frac{\omega}{(2+5\omega+2\omega^2)^2}+\frac{\omega^2}{(2+2\omega+5\omega^2)^2}$$

$$=\frac{\omega}{(2+2\omega+2\omega^2+3\omega)^2}+\frac{\omega^2}{(2+2\omega+2\omega^2+3\omega^2)^2}$$

$$=\frac{\omega}{(\text{صفر}+3\omega)^2}+\frac{\omega^2}{(\text{صفر}+3\omega^2)^2}$$

$$=\frac{\omega}{9\omega^2}+\frac{\omega^2}{9\omega^4}$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(\omega+\omega^2\right)$$

$$=-\frac{1}{9}=$$ **الطرف الأيسر**

السؤال ٦٦

إذا كانت $\sqrt{٦}$ سم ، ٢ سم ، ١ + $\sqrt{٣}$ سم أطوال مثلث فأوجد قياس زواياه

(المصدر – المركز الوطني للعلوم الرياضية * المملكة العربية السعودية *– المسابقة الأولى)

الحـــــل

نفرض أن زواي المثلث هي : س ، ص ،ع وأن اضلاع المثلث هي : $\bar{س}$ ، $\bar{ص}$ ، $\bar{ع}$

$\bar{س} = \sqrt{٦}$ ، $\bar{ص} = ٢$ ، $\bar{ع} = ١ + \sqrt{٣}$

D $(\bar{س})^{٢} = (\bar{ص})^{٢} + (\bar{ع})^{٢} - ٢\,\bar{ص}\,\bar{ع}$ جتا س

E $٦ = ٤ + (٤ + ٢\sqrt{٣}) - ٢ \times ٢ \times (١ + \sqrt{٣})$ جتا س

$٦ = ٤ + ٤ + ٢\sqrt{٣} - ٤$ جتا س $- ٤\sqrt{٣}$ جتا س

$٦ = ٨ + ٢\sqrt{٣} - (٤ + ٤\sqrt{٣})$ جتا س

جتا س $= (٢ + ٢\sqrt{٣}) \div (٤ + ٤\sqrt{٣})$

جتا س $= \frac{١}{٢}$

E $\angle$ س $= ٦٠^{\circ}$

بالمثل يمكن الحصول على :

$\angle$ ص $= ٤٥^{\circ}$ ، ومنها $\angle$ ع $= ٧٥^{\circ}$

السؤال (٦٧)

أوجد مجموعة حل المعادلة :

$\sqrt{٣}$ جتاهـ - جا هـ = $\sqrt{٢}$ صفر° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°

(المصدر – المركز الوطني للعلوم الرياضية * المملكة العربية السعودية *– المسابقة الثانية)

الحـــــل

بالقسمة على ٢

$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جتا هـ - $\frac{١}{٢}$ جا هـ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

E جتا ٣٠ جتا هـ - جا ٣٠ جا هـ = جتا ٤٥

E جتا (٣٠ + هـ) = جتا ٤٥

E٣٠ + هـ = ٤٥ أو ٤٥ + ٣٦٠

أو ٣٠ + هـ = -٤٥ أو - ٤٥ + ٣٦٠

E هـ = ١٥° أو ٢٨٥°

السؤال (٦٧)

أوجد :

* $\int$ س^{٢} جتا س ء س   * $\int$ (قاس ظاس) $\sqrt{\text{٤ + ٣ قا س}}$ ء س

(المصدر – المسابقات المحلية الهندية – ١٩٨١)

الحـــل

* $\int$ س^{٢} جتا س ء س

نفرض أن : س^{٢} = ص $\Leftarrow$ ء ص = ٢س ء س

وكذلك نفرض أن ء ع = جتا س ء س $\Leftarrow$ ع = جا س

وباستخدام قاعدة التكامل بالتجزيء:-

$\int$ س^{٢} جتا س ء س = ص × ع - $\int$ ع ء ص

$\int$ س^{٢} جتا س ء س = س^{٢} × جا س - $\int$ ٢ س × جا س ء س

= س^{٢} جا س - ٢ $\int$ س جا س ء س

بإجراء التكامل بالتجزيء مرة أخري حيث نفرض أن :-

س = ص $\Leftarrow$ ء ص = ء س

وكذلك نفرض أن ء ع = جا س ء س $\Leftarrow$ ع = - جتا س

$\int$ س^{٢} جتا س ء س = س^{٢} جا س - ٢ { - س جتا س - $\int$ (- جتا س) ء س }

= س^{٢} جا س - ٢ { - س جتا س + $\int$ جتا س ء س }

= س^{٢} جا س - ٢ { - س جتا س + جا س } + ث

= س^{٢} جا س + ٢ س جتا س - ٢ جا س + ث

* $\int (\text{قاس ظاس}) \sqrt{\text{٤ + ٣ قاس}} \; \text{ء س}$

الحـــــل

نفرض أن :

$\text{٤ + ٣ قاس} = \text{ص} \quad \Leftarrow \quad \text{ء ص} = \text{٣ قاس ظاس ء س}$

$\Leftarrow \frac{١}{٣} \text{ ء ص} = \text{قاس ظاس ء س}$

$\int (\text{قاس ظاس}) \sqrt{\text{٤ + ٣ قاس}} \; \text{ء س} = \int \sqrt{\text{٤ + ٣ قاس}} \; (\text{قاس ظاس}) \; \text{ء س}$

بالتعويض :

E $\int \sqrt{\text{٤ + ٣ قاس}} \; (\text{قاس ظاس}) \; \text{ء س} = \int \sqrt{\text{ص}} \; (\frac{١}{٣}) \; \text{ء ص}$

$= \frac{١}{٣} \int \text{ص}^{\frac{١}{٢}} \; \text{ء ص}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{\text{ص}^{٢/٣}}{٢/٣} + \text{ث}$

$= \frac{٢}{٩} (\text{٤ + ٣ قاس})^{\frac{٣}{٢}} + \text{ثابت}$



السؤال

أوجد س + ص إذا كان :-

$$(٦^{٣٠} + ٦^{-٣٠})(٦^{٣٠} - ٦^{-٣٠}) = ٣^{\text{س}} \times ٨^{\text{ص}} - ٣^{-\text{س}} \times ٨^{-\text{ص}}$$

(المصدر – مسابقة مدارس كولومبيا البريطانية – ٢٠٠٤)

الحــــل

$$٦^{٦٠} - ٦^{-٦٠} = ٣^{\text{س}} \times ٢^{٣\text{ص}} - ٣^{-\text{س}} \times ٢^{-٣\text{ص}}$$

$$(٢ \times ٣)^{٦٠} - (٢ \times ٣)^{-٦٠} = ٣^{\text{س}} \times ٢^{٣\text{ص}} - ٣^{-\text{س}} \times ٢^{-٣\text{ص}}$$

$$٢^{٦٠} \times ٣^{٦٠} - ٢^{-٦٠} \times ٣^{-٦٠} = ٣^{\text{س}} \times ٢^{٣\text{ص}} - ٣^{-\text{س}} \times ٢^{-٣\text{ص}}$$

E $٢^{٦٠} \times ٣^{٦٠} = ٣^{\text{س}} \times ٢^{٣\text{ص}}$

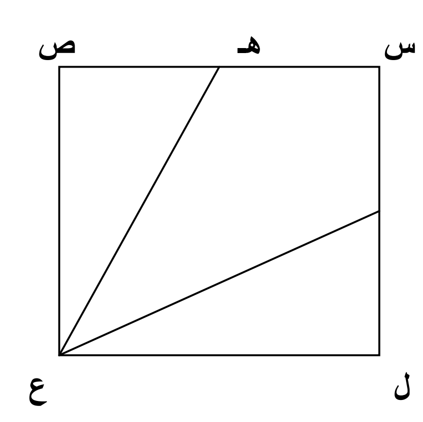
أو $٢^{-٦٠} \times ٣^{-٦٠} = ٣^{-\text{س}} \times ٢^{-٣\text{ص}}$

E س = ٦٠ ، ٣ ص = ٦٠ ومنها ص = ٢٠

E س + ص = ٨٠

السؤال (٦٩)

على الشكل :-
س ص ع ل مربع طول ضلعه ٢ سم ،
و ، هـ منتصفات الأضلاع س ل ، س ع
على الترتيب ، أوجد جتا ∠ (هـ ع و)



(المصدر – مسابقة مدارس كولومبيا البريطانية – ٢٠٠٤)

الحــــل

نفرض ان :

∠ **(و ع ل) =** q ، ∠ **(هـ ع ل) =** s

باستخدام نظرية فيثاغورث

|ع هـ|٢ = |ع هـ|٢ = ١ + ٤

|ع هـ| = |ع هـ| = √٥

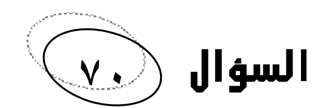
جتا ∠ **(هـ ع و) = جتا** ∠ **(** s - q **)**

= جتا s **جتا** q **+ جا** s **جا** q

$$= \frac{١}{\sqrt{٥}} \times \frac{٢}{\sqrt{٥}} + \frac{٢}{\sqrt{٥}} \times \frac{٢}{\sqrt{٥}}$$

$$= \frac{٢}{٥} + \frac{٢}{٥}$$

$$= \frac{٤}{٥}$$

السؤال 

أوجد الدالة المشتقة الأولى للدوال التالية:-

* $\text{ص} = (\text{س}^{٣} - ٧\,\text{س}^{٢})^{٤}\sqrt{(١ + ٩\,\text{س})}$

* $\text{ص} = \text{ظا}^{٣}\sqrt{\text{ظتا}\,(٧\,\text{س})}$

(المصدر – المسابقات المحلية الهندية – ١٩٨٤)

الحـــــل

* $\text{ص} = (\text{س}^{٣} - ٧\,\text{س}^{٢})^{٤}\sqrt{(١ + ٩\,\text{س})}$

$$\text{ص} = (\text{س}^{٣} - ٧\,\text{س}^{٢})^{٤}\,(١ + ٩\,\text{س})^{\frac{١}{٢}}$$

$\text{ص}' =$ الأول × تفاضل الثاني + الثاني × تفاضل الأول

$$\text{ص}' = (\text{س}^{٣} - ٧\,\text{س}^{٢})^{٤} \times \text{ء}\{(١ + ٩\,\text{س})^{\frac{١}{٢}}\} + (١ + ٩\,\text{س})^{\frac{١}{٢}} \times \text{ء}\{(\text{س}^{٣} - ٧\,\text{س}^{٢})^{٤}\}$$

$$\text{ص}' = \frac{(\text{س}^{٣} - ٧\,\text{س}^{٢})^{٤}}{٢\,(١ + ٩\,\text{س})^{١/٢}} \times ٩ + ٤(\text{س}^{٣} - ٧\,\text{س}^{٢})^{٣} \times (٣\text{س}^{٢} - ١٤\,\text{س})\,(١ + ٩\,\text{س})^{\frac{١}{٢}}$$

$$\text{ص}' = \frac{٩\,(\text{س}^{٣} - ٧\,\text{س}^{٢})^{٤}}{٢\,(١ + ٩\,\text{س})^{١/٢}} + ٤(\text{س}^{٣} - ٧\,\text{س}^{٢})^{٣} \times (٣\text{س}^{٢} - ١٤\,\text{س})\,(١ + ٩\,\text{س})^{\frac{١}{٢}}$$

$$\times \frac{٢\,(١ + ٩\,\text{س})^{١/٢}}{٢\,(١ + ٩\,\text{س})^{١/٢}}$$

$$\text{ص}' = \frac{٩\,(\text{س}^{٣} - ٧\,\text{س}^{٢})^{٤} + ٨\,(٣\text{س}^{٢} - ١٤\,\text{س})(\text{س}^{٣} - ٧\,\text{س}^{٢})^{٣}\,(١ + ٩\,\text{س})}{٢\,(١ + ٩\,\text{س})^{١/٢}}$$

$$\text{ص}' = \frac{(\text{س}^{٣} - ٧\,\text{س}^{٢})^{٣}\,\{٩\,(\text{س}^{٣} - ٧\,\text{س}^{٢}) + ٨\,(٣\text{س}^{٢} - ١٤\,\text{س})\,(١ + ٩\,\text{س})\}}{٢\,(١ + ٩\,\text{س})^{١/٢}}$$

$$\text{ص}' = \frac{(\text{س}^{٢}\,(\text{س} - ٧))^{٣}\,\{٩\,\text{س}^{٣} - ٦٣\,\text{س}^{٢} + ٨\,(٣\text{س}^{٢} + ٢٧\,\text{س}^{٣} - ١٤\text{س} - ١٢٦\text{س}^{٢})\}}{٢\,(١ + ٩\,\text{س})^{١/٢}}$$

$$\text{ص}' = \frac{(\text{س}^{٢})^{٣}\,(\text{س} - ٧)^{٣}\,\{٩\,\text{س}^{٣} - ٦٣\,\text{س}^{٢} + ٢٤\text{س}^{٢} + ٢١٦\,\text{س}^{٣} - ١١٢\text{س} - ١٠٠٨\text{س}^{٢}\}}{٢\,(١ + ٩\,\text{س})^{١/٢}}$$

$$\text{ص}' = \frac{\text{س}^{٦}\,(\text{س} - ٧)^{٣}\,(٢٢٥\,\text{س}^{٣} - ١٠٤٧\,\text{س}^{٢} - ١١٢\text{س})}{٢\,(١ + ٩\,\text{س})^{١/٢}}$$

$$\text{ص}' = \frac{\text{س}^{٦}\,(\text{س} - ٧)^{٣} \times \text{س}(٢٢٥\,\text{س}^{٢} - ١٠٤٧\,\text{س} - ١١٢)}{٢\,(١ + ٩\,\text{س})^{١/٢}}$$

$$\text{ص}' = \frac{\text{س}^{٧}(\text{س} - ٧)^{٣}\,(٢٢٥\,\text{س}^{٢} - ١٠٤٧\,\text{س} - ١١٢)}{٢\,(١ + ٩\,\text{س})^{١/٢}}$$

$$* \quad \text{ص} = \text{ظا}^{٣} \sqrt{\text{ظتا} (٧ \text{س})}$$

الحـــــل

$$\text{ص} = \{ \text{ظا} \sqrt{\text{ظتا} (٧\text{س})} \}^{٣}$$

$$\text{ص}' = ٣ \left(\text{ظا} \sqrt{\text{ظتا} (٧\text{س})} \right)^{٢} \times \text{ء} \left(\text{ظا} \sqrt{\text{ظتا} (٧\text{س})} \right)$$

$$\text{ص}' = ٣ \left(\text{ظا}^{٢} \sqrt{\text{ظتا} (٧\text{س})} \right) \left(\text{قا}^{٢} \sqrt{\text{ظتا} (٧\text{س})} \right) \times \text{ء} \left(\sqrt{\text{ظتا} (٧\text{س})} \right)$$

$$\text{ص}' = ٣ \left(\text{ظا}^{٢} \sqrt{\text{ظتا} (٧\text{س})} \right) \left(\text{قا}^{٢} \sqrt{\text{ظتا} (٧\text{س})} \right) \times \frac{١}{٢} (\text{ظتا} (٧\text{س}))^{-١/٢} \times \text{ء} \left(\sqrt{\text{ظتا} (٧\text{س})} \right)$$

$$\text{ص}' = \frac{٣}{٢} \left(\text{ظا}^{٢} \sqrt{\text{ظتا} (٧\text{س})} \right) \left(\text{قا}^{٢} \sqrt{\text{ظتا} (٧\text{س})} \right) \times \frac{١}{(\text{ظتا} (٧\text{س}))^{-١/٢}} \times (- \text{قتا}^{٢} (٧\text{س})) \times \text{ء} (٧\text{س}) .$$

$$\text{ص}' = - \frac{٣}{٢} \left(\text{ظا}^{٢} \sqrt{\text{ظتا} (٧\text{س})} \right) \left(\text{قا}^{٢} \sqrt{\text{ظتا} (٧\text{س})} \right) \times \frac{١}{(\text{ظتا} (٧\text{س}))^{-١/٢}} \times (- \text{قتا}^{٢} (٧\text{س})) \times (٧)$$

$$\text{ص}' = \frac{-٢١ \, \text{قتا}^{٢} (٧\text{س}) \left(\text{ظا}^{٢} \sqrt{\text{ظتا} (٧\text{س})} \right) \left(\text{قا}^{٢} \sqrt{\text{ظتا} (٧\text{س})} \right)}{٢ \, (\text{ظتا} (٧\text{س}))^{١/٢}}$$

السؤال 

اذا كانت (د) دالة مجالها كل الأعداد الحقيقية ، وكانت :-

د (س) + ٢ د ($\frac{\text{س + ٢٠٠١}}{\text{س - ١}}$) = ٤٠١٣ – س ، ∀ س 1 ١

اوجد قيمة : د(٢٠٠٣)

(المصدر – مسابقة مدارس كولومبيا البريطانية – ٢٠٠٣)

الحــــل

D ٢ L لمجال الدالة

نفرض أن س = ٢

د(٢) + ٢د($\frac{\text{٢+٢٠٠١}}{\text{٢ – ١}}$) = ٤٠١٣ – س

د(٢) + ٢د(٢٠٠٣) = ٤٠١١ بالضرب ×٢

٢د(٢) + ٤د(٢٠٠٣) = ٨٠٢٢ ------------(١)

نفرض أن س = ٢٠٠٣

د(٢٠٠٣) + ٢د ($\frac{\text{٢٠٠٣+٢٠٠١}}{\text{٢٠٠٣ – ١٠}}$) = ٤٠١٣ – ٢٠٠٣

د(٢٠٠٣) + ٢د($\frac{\text{٤٠٠٤}}{\text{٢٠٠٢}}$) = ٢٠١٠

د(٢٠٠٣) + ٢د(٢) = ٢٠١٠

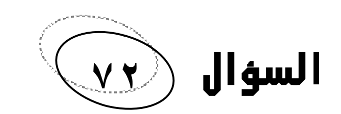
٢د(٢) = ٢٠١٠ - د (٢٠٠٣) ------------(٢)

بالتعويض من (٢) في (١)

٢٠١٠ - د (٢٠٠٣) + ٤د(٢٠٠٣) = ٨٠٢٢

٣د(٢٠٠٣) = ٨٠٢٢ - ٢٠١٠ = ٦٠١٢

د(٢٠٠٣) = $\frac{\text{٦٠١٢}}{\text{٣}}$ = ٢٠٠٤



السؤال ٧٢

اذا كانت : جا هـ + جتاهـ = س

فاوجد : جا^{٤}هـ + جتا^{٤}هـ بدلالة س .

(المصدر – مسابقة مدارس جورجيا الأمريكية – ٢٠٠٤)

الحـــــل

D جا هـ + جتاهـ = س

بالتربيع : جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ + ٢جا هـ جتا هـ = س^{٢}

٢جا هـ جتا هـ = س^{٢} - ١

بالتربيع : ٤ جا^{٢} هـ جتا^{٢} هـ = س^{٤} – ٢س^{٢} + ١ بالقسمة على ٢

٢ جا^{٢} هـ جتا^{٢} هـ = $\frac{\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٢} + ١}{٢}$ --------------- (١)

جا^{٤}هـ + جتا^{٤}هـ = جا^{٢}هـ × جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ × جتا^{٢}هـ

= جا^{٢}هـ (١ – جتا^{٢}هـ) + جتا^{٢}هـ (١ – جا^{٢}هـ)

= جا^{٢}هـ - جا^{٢}هـ جتا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ - جا^{٢}هـ جتا^{٢}هـ

= جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ - ٢ جا^{٢}هـ جتا^{٢}هـ

= ١- ٢ جا^{٢}هـ جتا^{٢}هـ --------------- (٢)

بالتعويض من (١) في (٢)

جا^{٤}هـ + جتا^{٤}هـ = ١ - $\frac{\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٢} + ١}{٢}$

جا^{٤}هـ + جتا^{٤}هـ = $\frac{١ + ٢\text{س}^{٢} - \text{س}^{٤}}{٢}$



السؤال ٧٣

إذا كانت : س^{٢} + س ص + س = ١٤ ، ص^{٢} + س ص + ص = ٢٨

فأوجد القيم الممكنة للمقدار: س + ص

(المصدر – مسابقة مدارس كولومبيا البريطانية – ٢٠٠٠)

الحـــــل

نفرض أن :

س^{٢} + س ص + س = ١٤ --------------------(١)

ص^{٢} + س ص + ص = ٢٨ --------------------(٢)

بجمع (١) ،(٢)

س^{٢} + س ص + س + ص^{٢} + س ص + ص = ٤٢

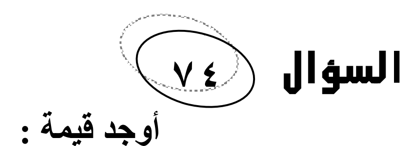
(س^{٢} +٢ س ص+ ص^{٢}) + (س+ ص) =٤٢

(س+ ص)^{٢} + (س+ ص) – ٤٢ = صفر

[(س+ ص) + ٧] [(س+ ص) – ٦] = صفر

س+ ص = - ٧

أو س+ ص = ٦

السؤال 

أوجد قيمة :

$$\sqrt[٣]{٥ + ٢\sqrt{١٣}} + \sqrt[٣]{٥ - ٢\sqrt{١٣}}$$

(المصدر – مسابقة مدارس جورجيا الأمريكية – ٢٠٠١)

الحـــــل

نفرض أن :

$\text{س} = \sqrt[٣]{٥ + ٢\sqrt{١٣}}$ ، $\text{ص} = \sqrt[٣]{٥ - ٢\sqrt{١٣}}$

ونفرض كذلك أن : ل = س + ص

E $\text{ل}^٣ = (\text{س} + \text{ص})^٣ = \text{س}^٣ + ٣\,\text{س}\,\text{ص}^٢ + ٣\,\text{س}^٢\,\text{ص} + \text{ص}^٣$

$= \text{س}^٣ + \text{ص}^٣ + ٣\,\text{س}\,\text{ص}\,(\text{س} + \text{ص})$

$= \text{س}^٣ + \text{ص}^٣ + ٣\,\text{س}\,\text{ص}\,\text{ل}$

D $\text{س} = \sqrt[٣]{٥ + ٢\sqrt{١٣}}$

Ü $\text{س}^٣ = ٥ + ٢\sqrt{١٣}$

بالمثل : $\text{ص}^٣ = ٥ - ٢\sqrt{١٣}$

$\text{س}\,\text{ص} = \sqrt[٣]{(٥ + ٢\sqrt{١٣})(٥ - ٢\sqrt{١٣})}$

$\text{س}\,\text{ص} = \sqrt[٣]{٢٥ - ٤\,(١٣)} = \sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$

E $\text{ل}^٣ = ٥ + ٢\sqrt{١٣} + ٥ - ٢\sqrt{١٣} + ٣\,(-٣)\,\text{ل}$

E ل^{٣} = ١٠ – ٩ ل

E ل^{٣} + ٩ل - ١٠ = صفر

يتضح من المعادلة الأخيرة أن أحد جذورها هو الواحد الصحيح

E **العامل (ل – ١) هو أحد عاملي المعادلة : ل^{٣} + ٩ل - ١٠ = صفر**

E **بقسمة (ل^{٣} + ٩ل - ١٠) ÷ (ل – ١)**

E ل^{٣} + ٩ل - ١٠ = (ل^{٢} + ل + ١) (ل- ١) = صفر

ل^{٢} + ل + ١ = صفر **(هذه المعادلة ليس لها حلول حقيقية حيث أن مميزها < صفر)**

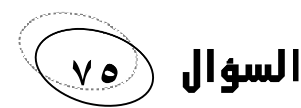
E ل – ١ = صفر

ومنها ل =١ هو جذر المعادلة الحقيقي الوحيد

D س + ص = ل

$$\sqrt[٣]{٥ + ٢\sqrt{١٣}} + \sqrt[٣]{٥ - ٢\sqrt{١٣}} = ١$$

السؤال



أوجد مجموعة حل المعادلة :

ê س+ ٣ê + ê س - ٥ê = ١٢

(المصدر – مسابقة مدارس كولومبيا البريطانية – ٢٠٠٣)

الحـــــل

نلاحظ أن هناك ثلاث حالات للحل :-

س < -٣ Ü - (س + ٣) – (س – ٥) = ١٢

Ü - ٢ س + ٢ = ١٢

Ü س = - ٥

- ٣ ³ س < ٥ Ü (س + ٣) – (س – ٥) = ١٢

Ü تنعدم قيمة س (ليس حلاً)

س £ ٥ Ü (س + ٣) – (س – ٥) = ١٢

Ü ٢ س = ١٤

Ü س = ٧

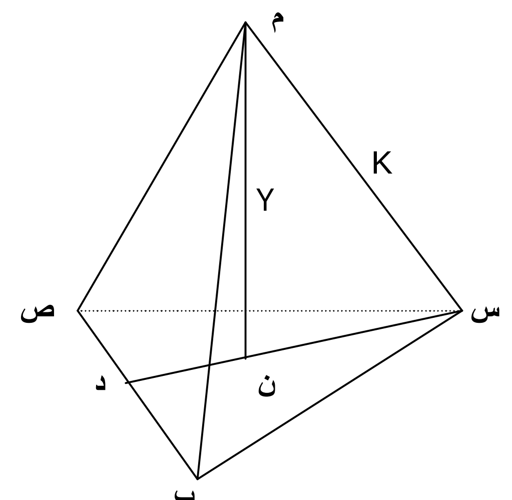
مجموعة الحل = { ٧ ، - ٣}

السؤال (٧٦)

اثبت أنه في الهرم الثلاثي المنتظم أن النسبة بين طول حرفه إلى طول ارتفاعه كنسبة $\sqrt{٦}$: ٢ .

(المصدر – المسابقات المحلية الهندية – ١٩٩٤)

الحـــل



نفرض أن :

م س ص ب هرم ثلاثي منتظم طول ضلعه K

، م ن ⊥ القاعدة س ص ع

، | م ن | = Y

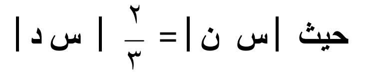
D الهرم ثلاثي منتظم

E ن هي مركز المثلث س ص ب

أي أن : ن هي نقطة تلاقي المتوسطات في المثلث س ص ب



حيث |س ن| = $\frac{٢}{٣}$ | س د |



ولكن | س د | = K جا ٦٠° = $\sqrt{\frac{٣}{٢}}$ K

E | س د | = K $\sqrt{\frac{٣}{٢}}$

E | س ن | = $\frac{٢}{٣}$ × K $\sqrt{\frac{٣}{٢}}$ = $\sqrt{\frac{٣}{٣}}$ K

في] م ن س القائم الزاوية في ن

(س م)^{٢} = (س ن)^{٢} + (ن م)^{٢}

K^{٢} = $\left(\sqrt{\frac{٣}{٣}} K \right)^{٢}$ + Y^{٢}

K^{٢} = $\frac{١}{٣}$ K^{٢} + Y^{٢} Ü ٣K^{٢} = K^{٢} + ٣ Y^{٢} Ü ٢K^{٢} = ٣ Y^{٢}

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين Ü K : Y = $\sqrt{٦}$: ٢

السؤال 

ما هو الزمن الذي يحتاج إليه شخص لأن يدفع ديناً قدره ٧١٥٠٠ ريال إذا دفع ١٠٠ ريال في نهاية الأسبوع الأول ثم ١٥٠ ريال في نهاية الأسبوع الثاني ثم ٢٠٠ ريال في نهاية الأسبوع الثالث وهكذا.

(من كتاب مبادىء الرياضيات البحتة للدكتور/ فهمي هيكل – الطبعة الثانية)

الحــــــل

نتعامل مع المشكلة على أنها متتابعة حسابية مجموعها ٧١٥٠٠ ، وحدها الأول ١٠٠ وأساسها ٥٠ ، ; عدد حدودها

E ٧١٥٠٠ = $\frac{;}{٢}$ (٢٠٠ + ٥٠(; - ١))

٧١٥٠٠ = ١٠٠ ; + ٢٥ ; ^٢^ - $\frac{٥٠ ;}{٢}$

١٤٣٠٠٠= ١٥٠ ; + ٥٠ ; ^٢^

٢٨٦٠ = ٣ ; + ; ^٢^

; ^٢^ + ٣ ; - ٢٨٦٠ = صفر

(; + ٥٥) (; - ٥٢) = صفر

; = - ٥٥ **(مرفوض)**

، ; = ٥٢

E المدة = ٥٢ أسبوع .

السؤال ٧٨



إذا كانت معاملات ثلاثة حدود متتالية في مفكوك (١ + س) ;
هي : ٣٥ ، ٢١ ، ٧ على الترتيب فما قيمة ; ، وما رتبة هذه الحدود .

(من كتاب مبادىء الرياضيات البحتة للدكتور/ فهمي هيكل – الطبعة الثانية)

الحـــــل

$$Q^{ن}_{م} = ٣٥ \quad ، \quad Q^{ن}_{م + ١} = ٢١ \quad ، \quad Q^{ن}_{م + ٢} = ٧$$

$$\frac{;!}{م!\ (;\ - م)!} = ٣٥ \quad \text{-------------------(١)}$$

$$\frac{;!}{(م + ١)!\ (;\ - م - ١))!} = ٢١ \quad \text{-------------------(٢)}$$

$$\frac{;!}{(م + ٢)!\ (;\ - م - ٢))!} = ٧ \quad \text{-----------------(٣)}$$

بقسمة المعادلة (١) على (٢)

$$E \quad \frac{(م + ١)!\ (;\ - م - ١))!}{م!\ (;\ - م)!} = \frac{٣٥}{٢١}$$

$$\frac{م + ١}{;\ - م} = \frac{٥}{٣}$$

٣ م + ٣ = ٥ ; - ٥ م

٥ ; - ٨ م – ٣ = صفر --------------------(٤)

بقسمة المعادلة (٢) على (٣)

(م + ٢)! (; - م –٢)) ! / **(م + ١)! (; - م – ١)) !** = ٢١ / ٧

م + ٢ / **; - م - ١** = **٣**

م + ٢ = ٣ ; - ٣ م – ٣

٣ ; - ٤ م – ٥ = صفر **--------------------(٥)**

بحل المعادلتين (٤) ، (٥) معاً

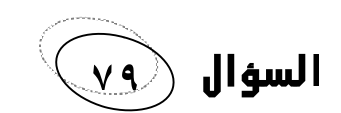
E ; = ٧ ، م = ٤

E **أس المقدار = ; = ٧**

، ٣٥ هي معامل الحد الخامس

، ٢١ هي معامل الحد السادس

، ٧ هي معامل الحد السابع

السؤال 

استعن بخواص المحددات لإثبات أن :

$$\begin{vmatrix} \text{س}^3 - \text{ص}^3 & \text{س}^2 & \text{س} \\ \text{ب}^3 - \text{ص}^3 & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ \text{جـ}^3 - \text{ص}^3 & \text{جـ}^2 & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ب} - \text{س})\,(\text{جـ} - \text{س})\,(\text{جـ} - \text{ب})\,(\text{ص}^3 - \text{ب جـ س})$$

(المصدر – المسابقات المحلية الهندية – ١٩٩٤)

الحـــــل

بتحويل الطرف الأيمن إلى مجموع محددين

الطرف الأيمن =

$$\begin{vmatrix} \text{س}^3 & \text{س}^2 & \text{س} \\ \text{ب}^3 & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ \text{جـ}^3 & \text{جـ}^2 & \text{جـ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\text{ص}^3 & \text{س}^2 & \text{س} \\ -\text{ص}^3 & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ -\text{ص}^3 & \text{جـ}^2 & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

$$= \text{س ب جـ} \begin{vmatrix} \text{س}^2 & \text{س} & 1 \\ \text{ب}^2 & \text{ب} & 1 \\ \text{جـ}^2 & \text{جـ} & 1 \end{vmatrix} - \text{ص}^3 \begin{vmatrix} 1 & \text{س}^2 & \text{س} \\ 1 & \text{ب}^2 & \text{ب} \\ 1 & \text{جـ}^2 & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

بتبديل العمود الأول و العمود الثالث في المحدد الأول ، و العمود الثاني و العمود الثالث في المحدد الثاني

$$= \text{س ب جـ} \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^2 \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}^2 \end{vmatrix} - \text{ص}^3 \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^2 \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}^2 \end{vmatrix}$$

$$= \text{ص}^{3} - \text{س ب جـ} \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^{2} \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^{2} \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}^{2} \end{vmatrix}$$

بطرح الصف الثاني من الصف الأول ، وطرح الصف الثالث من الصف الأول

$$= \text{ص}^{3} - \text{س ب جـ} \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^{2} \\ 0 & \text{ب - س} & \text{ب}^{2} - \text{س}^{2} \\ 0 & \text{جـ - س} & \text{جـ}^{2} - \text{س}^{2} \end{vmatrix}$$

بتحليل المقدارين ($\text{ب}^{2} - \text{س}^{2}$) ، ($\text{جـ}^{2} - \text{س}^{2}$)كفرق بين مربعين وأخذ المقدارين (ب – س) ، (جـ - س) كعوامل مشتركة من الصفين الثاني والثالث

$$= (\text{ص}^{3} - \text{س ب جـ})\ (\text{ب} - \text{س})\ (\text{جـ} - \text{س}) \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^{2} \\ 0 & 1 & \text{ب + س} \\ 0 & 1 & \text{جـ + س} \end{vmatrix}$$

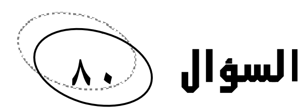
بطرح الصف الثاني من الصف الأول

$$= (\text{ص}^{3} - \text{س ب جـ})\ (\text{ب} - \text{س})\ (\text{جـ} - \text{س}) \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^{2} \\ 0 & 1 & \text{ب + س} \\ 0 & 0 & \text{ب – جـ} \end{vmatrix}$$

بفك المحدد

$$= (\text{ص}^{3} - \text{س ب جـ})\ (\text{ب} - \text{س})\ (\text{جـ} - \text{س}) \times 1 \times 1 \times (\text{جـ} - \text{ب})$$

$$= (\text{ب} - \text{س})\ (\text{جـ} - \text{س})\ (\text{جـ} - \text{ب})\ (\text{ص}^{3} - \text{ب جـ س})$$

السؤال 

أوجد قيمة س التي تحقق المعادلة :-

لو$_{٢}$س لو$_{٤}$س لو$_{٦}$س = لو$_{٢}$ س لو$_{٤}$ س + لو$_{٢}$ س لو$_{٦}$ س + لو$_{٤}$ س لو$_{٦}$ س .

(مسابقة مدارس * M –A – T –H * الثانوية الأمريكية)

الحـــــل

إذا كانت س = ١ فإن طرفي المعادلة يتساويان وكلاً منهما يساوي الصفر

E س = ١ حل من حلول المعادلة

وللحصول على الحلول الأخرى نقسم طرفي المعادلة على : لو$_{٢}$س لو$_{٤}$س لو$_{٦}$س

$$E \quad ١ = \frac{١}{\text{لو}_{٦}\text{س}} + \frac{١}{\text{لو}_{٤}\text{س}} + \frac{١}{\text{لو}_{٢}\text{س}}$$

ولكن لكل م ، ن > صفر ، م ، ن 1 ١ $\quad \frac{١}{\text{لو}_{\text{م}}\text{ن}} = \text{لو}_{\text{ن}}\text{م}$

E باستخدام القاعدة السابقة :

١ = لو $_{\text{س}}$٦ + لو $_{\text{س}}$٤ + لو $_{\text{س}}$٢

١ = لو $_{\text{س}}$ (٦ × ٤ × ٢)

١ = لو $_{\text{س}}$٤٨

E س =٤٨

E مجموعة الحل = { ١ ، ٤٨ }.

السؤال 

إذا كانت :

$$\frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٣} - ٥\text{س}^{٢} + ٨\text{س} - ٤} = \frac{Q}{\text{س} - ١} + \frac{;}{\text{س} - ٢} + \frac{W}{(\text{س} - ٢)^{٢}}$$

فاوجد قيمة :

$$Q + ٢ ; + ٣ W$$

الحــــل

الطرف الأيسر

$$\frac{Q}{\text{س} - ١} + \frac{;}{\text{س} - ٢} + \frac{W}{(\text{س} - ٢)^{٢}} = \frac{Q\,(\text{س}-٢)^{٢} + ;\,(\text{س}-١)(\text{س} - ٢) + W\,(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)\,(\text{س} - ٢)^{٢}}$$

$$= \frac{Q\,(\text{س}-٢)^{٢} + ;\,(\text{س}-١)\,(\text{س} - ٢) + W\,(\text{س} - ١)}{\text{س}^{٣} - ٥\text{س}^{٢} + ٨\text{س} - ٤} = \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٣} - ٥\text{س}^{٢} + ٨\text{س} - ٤}$$

= الطرف الأيمن

$$E\ Q\,(\text{س}-٢)^{٢} + ;\,(\text{س}-١)(\text{س} - ٢) + W\,(\text{س} - ١) = \text{س} + ١$$

$$E\ Q\,(\text{س}^{٢} - ٤\text{س}+٤) + ;\,(\text{س}^{٢} - ٣\text{س} +٢) + W\,(\text{س} - ١) = \text{س} + ١$$

$$E\ Q\,\text{س}^{٢} - ٤Q\text{س}+٤Q + ;\,\text{س}^{٢} - ٣;\,\text{س} +٢; + W\,\text{س} - W = \text{س} + ١$$

$$E\ \text{س}^{٢}\,(Q + W) + \text{س}\,(-٤Q - ٣; + W) + (٤Q + ٢; - W) = \text{س} + ١$$

بمساواة المعاملات

$Q + ; =$ **صفر** ----------------(١)

$-٤Q - ٣; + W = ١$ ----------------(٢)

$٤Q + ٢; - W = ١$ ---------------(٣)

بجمع (٢) ، (٣)

$; = -٢$ **ومنها** $Q = ٢$ **ثم بالتعويض في (٢) نجد أن:** $W = ٣$

$$Q + ٢; + ٣W = ٢ + ٢\times(-٢) + ٣\times ٣ = ٢ - ٤ + ٩ = ٧$$

السؤال  ٨٢

على الشكل :
س ص جـ ب مستطيل تم تقسيمه إلى ثلاث مربعات متطابقة الأضلاع ،
رسمت القطع المستقيمة: س هـ ، س و، س جـ
اثبت أن :
قياس (∠ ١) = قياس ∠ (٢ + ٣)

(المصدر – الأستاذ/ محمد ضيف الله *ب- م *الأخاشيم)

الحـــــل

نفرض نقطة د L للشعاع س هـ بحيث
|س هـ| = |هـ د| ، ثم نصل القطع المستقيمة :-
ب د ، و د ، جـ د
في الشكل س ب د و

D |س هـ| = |هـ د| ، |ب هـ| = |هـ و|

E الشكل س ب د و متوازي أضلاع

E |س ب| = |و د| ، ∠س ب و = ∠ب و د = ٩٠°

E ∠ ٢ = ∠و ب د بالتبادل -----------------(١)

في] جـ و د القائم في ∠و ، والمتطابق الضلعين (|س ب| = |و د| = |جـ و|)

E ∠و جـ د = ٤٥ ° -----------------(٢)

D∠ب س د = ٤٥ ° -----------------(٣)

من (٢) ، (٣) ∠و جـ د = ∠ب س د (وهما مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها)

E الشكل س ب د جـ رباعياً دائرياً

E ∠ ٣ = ∠س د ب -----------------(٤)

D∠ ١ خارجة عن] ب هـ د

E ∠ ١= ∠ هـ ب د + ∠ هـ د ب -----------------(٥)

من (١) ، (٤) ، (٥) قياس (∠ ١) = قياس ∠ (٢ + ٣)

السؤال 

*** إذا كان ٧ ^{س} = ٢٥٦ ، ١٦ ^{ص} = ٤٩ ، اوجد قيمة ٤ $^{س ص +١}$**

**** إذا كان ٢ ^{٢س} = ٣ ^{ص} = ١٢ ^{٢ع} ، اثبت أن : س ص = ٢ع (س + ص)**

(المصدر – الأستاذ/ محمد ضيف الله *ب- م *الأخاشيم)

الحـــــل

*** نفرض أن : ٧ ^{س} = ٢٥٦ ----------------(١)**

، ١٦ ^{ص} = ٤٩ ----------------(٢)

بالرفع للقوة ص في المعادلة (١)

E ٧ $^{س ص}$ = ٢٥٦ ^{ص} ومنها ٧ $^{س ص}$ = (١٦) ^{٢ص}

D ١٦ ^{ص} = ٤٩ Ü (١٦) ^{٢ص} = ٤٩ ^{٢} = ٧ ^{٤} ---------------(٣)

بالتعويض من (٣) في (٢)

E ٧ $^{س ص}$ = ٧ ^{٤}

E س ص = ٤ E ٤ $^{س ص +١}$ = ٤ ^{٥} = ١٠٢٤

**** D ٢ ^{٢س} = ١٢ ^{٢ع} بالرفع للقوى ص**

E ٢ $^{٢س ص}$ = ١٢ $^{٢ع ص}$ Ü ٤ $^{س ص}$ = ١٢ $^{٢ع ص}$ ---------------(١)

D ٣ ^{ص} = ١٢ ^{٢ع} بالرفع للقوى س

E ٣ $^{س ص}$ = ١٢ $^{٢ع س}$ --------------(٢)

بضرب المعادلة (١) × المعادلة (٢)

E ٤ $^{س ص}$ × ٣ $^{س ص}$ = ١٢ $^{٢ع ص}$ × ١٢ $^{٢ع س}$

١٢ $^{س ص}$ = ١٢ $^{٢ع ص+ ٢ع س}$ Ü س ص = ٢ع (س+ص)

السؤال



أوجد قيم س، ص ، ع الموجبة في النظام

$$\begin{cases} ع^{س} = ص^{٢س} \\ ٢^{ع} = ٢ \times ٤^{س} \\ س + ص + ع = ١٦ \end{cases}$$

(المصدر - مسابقة مدارس أنديانا – بنسلفانيا - الثانوية الأمريكية)

الحـــــل

نفرض أن :-

$ع^{س} = ص^{٢س}$ ---------------(١)

$٢^{ع} = ٢ \times ٤^{س}$ ---------------(٢)

$س + ص + ع = ١٦$ ---------------(٣)

في المعادلة (١)

$ع^{س} = (ص^{٢})^{س}$ Ü $ع = ص^{٢}$ Ü $ص = \sqrt{ع}$ **(السالب مرفوض)**

في المعادلة (٢)

$٢^{ع} = ٢ \times ٤^{س}$ Ü $٢^{ع} = ٢ \times ٢^{٢س} = ٢^{٢س+١}$

Ü $ع = ٢س + ١$ Ü $س = \frac{ع - ١}{٢}$

بالتعويض عن قيمة س ، ص في المعادلة (٣)

$\frac{ع - ١}{٢} + \sqrt{ع} + ع = ١٦$ **بالضرب × ٢**

$٣٣ – ٣ع = ٢\sqrt{ع}$ **بالتربيع**

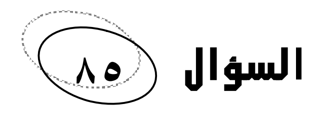
$٩ع^{٢} – ٢٠٢ع – ١٠٨٩ =$ صفر

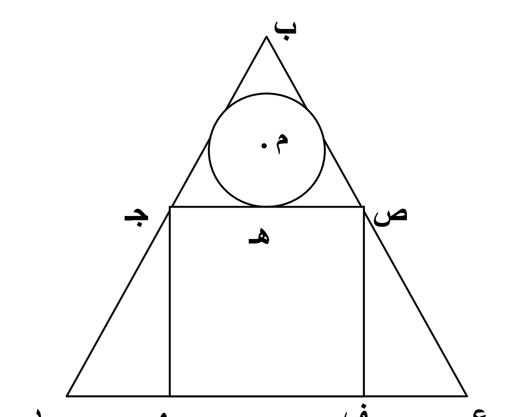
$(٩ع + ١٢١)(ع – ٩) =$ صفر Ü $ع = ٩$ **(السالب مرفوض)**

بالتعويض عن قيمة ع

$ص = \sqrt{٩} = ٣$ **(السالب مرفوض)**

$س = ٤$





علي الشكل:-
مربع ودائرة مرسومان داخل مثلث متطابق الأضلاع بحيث أن الدائرة تمس ضلعين من أضلاع المثلث وأحد أضلاع المربع الذي بدوره ينطبق على قاعدة المربع، احسب طول قطر الدائرة.

(المصدر - مسابقة مدارس أنديانا – بنسلفانيا - الثانوية الأمريكية)

الحـــــل

نفرض أن طول ضلع المربع Ü س

ونصف قطر الدائرة Ü =

في] ب ع د المتطابق الأضلاع

D ص جـ // ع د

E |ص ب| = |ب جـ|

D الدائرة تمس أضلاع] ب ص جـ

E |ص ب| = |ب جـ| = |ص جـ| = طول ضلع المربع (س)

E |جـ د| = ل - س

في] جـ و د القائم في $\angle$ و

D $\angle$ د = ٦٠°

E $\frac{س}{ل - س} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ Ü س = $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣} + ٢}$ ل

D $\angle$ ب جـ ص= ٦٠°

E $\angle$ م جـ هـ= ٣٠°

E في] جـ هـ م القائم في $\angle$ هـ

$$\text{ظا }٣٠^\circ = \frac{|\text{م هـ}|}{|\text{هـ جـ}|} = \;\; = \;\; \div \frac{١}{٢}\text{ س}$$

$$Ü \;\; = \;\; = \frac{١}{٢}\text{ س} \times \text{ظا }٣٠^\circ$$ ------------------ **بالتعويض عن قيمة س**

$$= \;\; = \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣} + ٢} \times \text{ل } \frac{١}{\sqrt{٣}}$$

$$= \;\; = \frac{\text{ل}}{٢\sqrt{٣} + ٤} \;.$$

تم بحمد الله

